**Costin-Ionuț DOBROTĂ**

# PROBLEME DE MECANICĂ

**pentru CLASA a IX-a**

StudIS

**Editura StudIS**
adicenter@yahoo.com
Iasi, Sos. Stefan cel Mare, nr.5
Tel./fax: 0232 – 217.754

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**
**DOBROTĂ, COSTIN-IONUŢ**
**Probleme de mecanică pentru clasa a IX-a /**
Costin-Ionuţ Dobrotă. - Iaşi : StudIS, 2018
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-48-0013-8

53

Pre-press, tipar digital şi finisare:
**S.C. ADI CENTER SRL**
Şos. Ştefan cel Mare, nr. 5
Tel.: 217 754



http://fizicaliceu.com

# *Probleme de mecanică*

Lucrarea se adresează elevilor de clasa a IX-a, dar este utilă și elevilor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat sau pentru examenul de admitere în învățământul superior. Problemele propuse pot fi rezolvate în clasă împreună cu profesorul sau pot constitui teme pentru acasă, fiind grupate în capitole și subcapitole, conform programei de fizică actuale. Totodată, problemele propuse în această lucrare sunt grupate pe grade de dificultate și „marcate” astfel:

**/0/** *probleme – exerciții care se rezolvă utilizând relații prin care se definesc mărimi fizice sau relații care descriu fenomene fizice elementare,*

**/1/** *probleme – aplicații de nivel mediu,*

**/2/** *probleme complexe care implică fenomene și analize complexe,*

**/3/** *probleme de nivel avansat care implică evaluări de situații și fenomene, discuții, sau probleme de limită și extrem.*

Pentru problemele de tip **/0/** și **/1/** sunt oferite doar răspunsuri sub formă literală și numerică, în timp ce problemele de tip **/2/** și **/3/** au indicații de rezolvare sau rezolvări complete. Culegerea conține și un număr de probleme în care se cer reprezentări grafice în aplicația ***Excel***, pe care le considerăm utile pentru înțelegerea, descrierea, modelarea și interpretarea matematică a fenomenelor fizice. Testele recapitulative incluse în culegere sunt alcătuite din probleme grupate pe grade de dificultate, oferind astfel posibilitatea elevilor să se autoevalueze.

Mulțumesc colegei mele, prof. Lenuța Basoc și elevei noastre Teodora-Elena Bulichi, pentru discuții clarificatoare, corecturi, propuneri și rezolvări de probleme.

Pentru rezolvarea numerică a problemelor se consideră accelerația gravitațională $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$.

***Succes!***

Prof. dr. Costin-Ionuț DOBROTĂ

***Auxiliar avizat prin OMEN Nr. 3530/04.04.2018***

# Cuprins

# NOȚIUNI TEORETICE

## SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE MĂRIMI ȘI UNITĂȚI

***Mărimi fizice și unități de măsură fundamentale în SI***

| Nr. crt. | Mărime fizică fundamentală | Unitate de măsură | Simbol |
|---|---|---|---|
| 1 | Lungime: $l$, $L$, $h$, $x$, … | metru | m |
| 2 | Timp: $t$, $T$, $\tau$ | secundă | s |
| 3 | Masă: $m$, $M$ | kilogram | kg |
| 4 | Cantitatea de substanță: $\nu$ | mol | mol |
| 5 | Temperatura termodinamică: $T$ | Kelvin | K |
| 6 | Intensitatea curentului electric: $I$ | Amper | A |
| 7 | Intensitatea luminoasă: $I_v$ | candela | cd |

***Observație:*** Prin excepție, masa se măsoară în kg și nu în g, așadar gramul este submultiplu al kilogramului, și nu invers $\left(1\,\text{g} = 10^{-3}\,\text{kg}\right)$. În termodinamică, pentru a corela unitățile de măsură ale masei și cantității de substanță, se exprimă masa în **kg**, iar cantitatea de substanță ***se poate*** exprima în **kmol**.

***Mărimi fizice și unități de măsură derivate din unități fundamentale ale SI (exemple)***

| Mărime fizică: simbol | Unitatea de măsură în SI | Unitatea de măsură exprimată în unități fundamentale ale SI |
|---|---|---|
| Unghiul: $\alpha$ | rad – radian | $\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Unghiul solid: $\Omega$ | sr – steradian | $\text{m}^2\cdot\text{m}^{-2}$ |
| Arie: $A$, $S$ | | $\text{m}^2$ |
| Volum: $V$ | | $\text{m}^3$ |
| Viteză: $v$ | | m/s |
| Accelerație: $a$ | | $\text{m/s}^2$ |
| Densitate: $\rho$ | | $\text{kg/ m}^3$ |
| Forță: $F$ | Newton: N | $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Presiune: $p$ | Pascal: $\text{Pa} = \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ | $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Lucrul mecanic, energia, căldura: $L$, $E$, $W$, $Q$ | Joule: $\text{J} = \text{N}\cdot\text{m}$ | $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Puterea: $P$ | Watt: $\text{W} = \text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ | $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Sarcina electrică: $q$ | Coulomb: C | $A \cdot s$ |
| Tensiunea electrică: $U$ | Volt: $V = J \cdot C^{-1}$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ |
| Rezistența electrică, reactanța, impedanța: $R$, $X$, $Z$ | Ohm: $\Omega = V \cdot A^{-1}$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ |

***Unități de măsură tolerate (exemple)***

| Nr. crt. | Mărime fizică | Unitatea de măsură tolerată | Unitatea de măsură exprimată în unități ale SI |
|---|---|---|---|
| **1** | Distanță | Ångstrom | $1Å = 10^{-10}$ m |
| | | an – lumină | 1an–lumină = = $3 \cdot 10^8$ (m/s)$\cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600$ s = $9{,}4607304725808 \cdot 10^{15}$ m |
| **2** | Timp, durată | minutul | **1min. = 60 s** |
| | | ora | **1h = 60 min. = 3600 s** |
| **3** | Masă | tona | **1t = $10^3$ kg** |
| **4** | Arie | hectarul | 1ha = $10^4$ $m^2$ |
| **5** | Volum | litrul | **1L = $10^{-3}$ $m^3$** |
| **6** | Energie, căldură | kilowatt-ora | **1kWh = 3 600 000 J** |
| | | calorie | 1cal = 4,185 J |
| **7** | Putere | cal putere | **1CP = 735,49 W ≈ 736 W** |
| **8** | Presiune | atmosfera | 1atm = 101.325 Pa ≈ $10^5$ Pa<br>1 bar = $10^5$ Pa |
| | | milimetru coloană de mercur | 1mmHg ≈ 1torr = 1/760 atm ≈ 133,3 Pa |
| **10** | Temperatură | grad Celsius | $T(\mathrm{K}) = t(^\circ\mathrm{C}) + 273{,}15$ |
| | | grad Fahrenheit | $t(^\circ\mathrm{F}) = \frac{9}{5} t(^\circ\mathrm{C}) + 32$ |

*Submultiplii și multiplii unităților de măsură în SI*

| Denumire | Simbol | Factor de multiplicare |
|---|---|---|
| **pico** | **p–** | $\mathbf{10^{-12}}$ |
| **nano** | **n–** | $\mathbf{10^{-9}}$ |
| **micro** | **µ–** | $\mathbf{10^{-6}}$ |
| **mili** | **m–** | $\mathbf{10^{-3}}$ |
| **centi** | **c–** | $\mathbf{10^{-2}}$ |
| **deci** | **d–** | $\mathbf{10^{-1}}$ |
| | | |
| **deca** | **da–** | $\mathbf{10^{1}}$ |
| **hecto** | **h–** | $\mathbf{10^{2}}$ |
| **kilo** | **k–** | $\mathbf{10^{3}}$ |
| **mega** | **M–** | $\mathbf{10^{6}}$ |
| **giga** | **G–** | $\mathbf{10^{9}}$ |
| **tera** | **T–** | $\mathbf{10^{12}}$ |

## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL MATEMATIC

### *Exponenți*

$x^n$ semnifică $x$ înmulțit cu el însuși de $n$ ori, unde $x$ se numește *baza* iar $n$ este *exponentul* (de exemplu: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$). Dacă $n = 2$, $x^2$ se citește „$x$ pătrat”, iar dacă $n = 3$, $x^3$ se citește „$x$ cub” (exemple: $m^2$ se citește „metru pătrat”, iar $m^3$ se citește „metru cub”). Dacă $n = 1/2$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ se citește „rădăcina pătrată a lui $x$”, iar dacă $n = 1/3$, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ se citește „rădăcina cubică a lui $x$”.

### *Reguli de calcul cu puteri*

- $x^1 = x,\ x^0 = 1,\ x^{-1} = \dfrac{1}{x},\ x^{-n} = \dfrac{1}{x^n},$
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$

- Produsul a două puteri: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$,
- Raportul a două puteri: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
- Puterea unei puteri: $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

***Notația științifică și puterile lui 10***

În fizică, se întâlnesc frecvent valori numerice exprimate prin numere foarte mari sau foarte mici care se scriu folosind ***notația științifică*** sub forma unui număr zecimal cu o cifră în stânga separatorului zecimal (virgula), multiplicat cu o putere a lui 10: $a \cdot 10^b$.

Exemple:

- Viteza luminii în vid: $c = 2,99792458 \cdot 10^8\,\text{m/s} \simeq 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$;
- Raza medie a Pământului: $R_\text{P} = 6,371 \cdot 10^6\,\text{m}$;
- Masa electronului: $m_\text{e} = 9,10938291 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \simeq 9,1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$;
- Numărul lui Avogadro: $N_\text{A} = 6,02214129 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1} \simeq 6,022 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$;
- Sarcina electrică elementară: $e = 1,602176565 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$.

***Operații matematice cu puterile lui 10***

Considerăm următoarele numere în notație științifică: $a \cdot 10^m$, $b \cdot 10^n$ și $c \cdot 10^n$.

- $(a \cdot 10^m) \cdot (b \cdot 10^n) = a \cdot b \cdot 10^{m+n}$;

  Exemplu: $(2,31 \cdot 10^5) \cdot (3,12 \cdot 10^{-16}) = 7,21 \cdot 10^{-11}$

- $\frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{m-n}$;

  Exemplu: $\frac{3,6 \cdot 10^{12}}{7,2 \cdot 10^{-2}} = 0,5 \cdot 10^{14} = 5 \cdot 10^{13}$

- $b \cdot 10^n + c \cdot 10^n = (b + c) \cdot 10^n$;

  Exemplu: $2,4 \cdot 10^5 + 3,1 \cdot 10^6 = (0,24 + 3,1) \cdot 10^6 = 3,34 \cdot 10^6$

- $b \cdot 10^n - c \cdot 10^n = (b - c) \cdot 10^n$;

  Exemplu: $2,4 \cdot 10^5 - 3,8 \cdot 10^5 = (2,4 - 3,8) \cdot 10^5 = -1,4 \cdot 10^5$

***Observație:*** În limbaje de programare (C++, Fortran, etc.) și în aplicații (Excel, Access, etc.) notația științifică $a \cdot 10^b$ se scrie în forma „*a*E*b*" sau „*a*e*b*". De exemplu, $6,022 \cdot 10^{23}$ se scrie în forma 6,022e23, iar $1,6 \cdot 10^{-19}$ se scrie în forma 1,6e–19.

## *Algebră: ecuații și sisteme de ecuații*

***Ecuațiile*** scrise utilizând simboluri ale mărimilor fizice sunt frecvent folosite în fizică. O ecuație, numită uneori și *egalitate*, *relație* sau *formulă*, conține un singur semn „egal" care desparte cei doi membri ai ecuației (stâng și drept). O ecuație rămâne adevărată dacă orice operație validă făcută asupra unui membru al ecuației este făcută și asupra celuilalt membru. Operațiile pot fi: (a) adunarea sau scăderea unui număr sau unei mărimi fizice, (b) înmulțirea sau împărțirea cu/la un număr sau o mărime fizică, (c) ridicarea fiecărui membru al ecuației la aceeași putere.

***Ecuația de gradul I***, în *x*: $a \cdot x + b = 0,$ cu $a \neq 0,$ are soluția $x = \frac{-b}{a}.$

***Ecuația de gradul II***, în *x*: $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a \neq 0$, are soluțiile (numite și rădăcinile ecuației) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației. Dacă $\Delta > 0$ ecuația are două soluții reale și distincte, dacă $\Delta = 0$ ecuația are o soluție reală, iar dacă $\Delta < 0$ ecuația are soluții matematice complexe care, de regulă, nu pot avea semnificație fizică.

Cazuri particulare:

i) dacă $b = 0$, ecuația devine $ax^2 + c = 0,$

iar soluțiile matematice sunt $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$,

ii) dacă $c = 0$, ecuația devine $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow (ax + b)x = 0,$

iar soluțiile matematice sunt $x_1 = \frac{-b}{a},\ x_2 = 0.$

***Observație:*** În cazul în care o ecuație are mai multe soluții matematice, rezolvitorul problemei de fizică trebuie să decidă dacă ambele soluții au semnificație fizică sau doar una dintre soluții reprezintă un răspuns fizic corect.

Exemplul 1: să se rezolve ecuația $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, dacă necunoscuta este $a$.

Ecuația este de gradul I și se rezolvă prin transformări succesive, astfel:

- se înmulțesc ambii membri ai ecuației cu 2: $2x = 2v_0 t + at^2$;
- se separă termenul care conține necunoscuta, $a$: $2x - 2v_0 t = at^2$;
- se împart ambii membri ai ecuației la $t^2$: $\frac{2x - 2v_0 t}{t^2} = a$;
- se scrie soluția, în forma cea mai simplă: $a = \frac{2(x - v_0 t)}{t^2}$.

Exemplul 2: să se rezolve ecuația $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, dacă necunoscuta este $t$.

Ecuația este de gradul II și se rezolvă astfel:

- se formează ecuația de gradul II în $t$: $2x = 2v_0 t + at^2 \;\Rightarrow\; at^2 + 2v_0 t - 2x = 0$,
- se exprimă discriminantul ecuației: $\Delta = 4v_0^2 - 4a(-2x) \;\Rightarrow\; \Delta = 4(v_0^2 + 2ax)$,
- se scriu soluțiile matematice:

$$t_{1,2} = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \;\Rightarrow\; t_{1,2} = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{4(v_0^2 + 2ax)}}{2a},$$

- se scriu soluțiile, în forma cea mai simplă: $t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2ax}}{a}$.

*Aplicație numerică*: dacă distanța parcursă de un automobil este $x$ = 100 m, cu viteza inițială $v_0$ = 10 m/s și cu accelerația $a$ = 1,5 m/s$^2$, să se calculeze durata mișcării, $t$.

Soluțiile matematice sunt reale și distincte:

$$t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 100}}{1,5} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{400}}{1,5}$$, adică $t_1 \simeq 6,67\,\text{s}$ și $t_2 = -20\,\text{s}$.

Cea de-a doua soluție matematică nu reprezintă un răspuns fizic corect deoarece durata mișcării unui automobil nu poate fi negativă. Răspunsul corect, care are semnificație fizică, este unic: $t \simeq 6,67\,\text{s}$.

***Sisteme de ecuații.*** Dacă într-o problemă apar două necunoscute, $x$ și $y$, sunt necesare două ecuații independente pentru a determina în mod unic valorile celor două necunoscute. O metodă tipică de rezolvare este metoda substituției, în care

se scoate $x$ în funcție de $y$ dintr-o ecuație, se înlocuiește $x$ în cea de-a doua ecuație care va conține o singură necunoscută, $y$. Se rezolvă această ecuație în $y$ și se înlocuiește valoarea obținută în prima ecuație pentru a-l afla și pe $x$.
În general, pentru a afla $n$ necunoscute, sunt necesare $n$ ecuații independente.

Exemplu: folosind ecuațiile $v = v_0 + at$ și $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, să se obțină expresii matematice pentru $a$ și $t$.

- se exprimă $a$ din prima ecuație: $v - v_0 = at \;\Rightarrow\; a = \frac{v - v_0}{t}$,
- se înlocuiește $a$ în cea de-a doua ecuație: $x = v_0 t + \frac{v - v_0}{t}\frac{t^2}{2} \;\Rightarrow$

$$x = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{(2v_0 + v - v_0)t}{2} \;\Rightarrow\; t = \frac{2x}{v_0 + v},$$

- se înlocuiește $t$ în prima ecuație: $a = \frac{v - v_0}{t} \;\Rightarrow\; a = (v - v_0)\frac{v + v_0}{2x} \;\Rightarrow$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x}.$$

***Observație:*** În rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații din problemele de fizică, adeseori este de preferat să se lucreze cu simboluri ale mărimilor fizice (litere) până la găsirea unei *ecuații finale* prin care se exprimă necunoscuta în funcție de mărimile fizice cunoscute. În ecuația finală se înlocuiesc valorile numerice ale mărimilor cunoscute și se fac calcule până la răspunsul numeric final care se scrie, de regulă, folosind *notația științifică*. Răspunsul numeric este urmat, obligatoriu, de unitatea de măsură a mărimii fizice calculate.

### *Variații, variații relative, rapoarte exprimate în procente*

Fenomenele fizice sunt procese care se desfășoară în timp și implică variații (continue sau discrete) ale unor mărimilor fizice denumite uneori parametri sau variabile. Faptul că o mărime fizică variază înseamnă că valoarea acesteia se modifică: crește sau scade (de regulă odată cu trecerea timpului). În rezolvarea problemelor este important să punem în relații matematice informațiile referitoare la variații ale mărimilor fizice. Astfel, în cazul unei mărimi fizice notate $x$, dacă notăm cu $x_i$ – valoarea inițială a mărimii fizice și cu $x_f$ – valoarea finală a acesteia, putem întâlni următoarele exprimări:

| Textul | Relația matematică | Observații | Exemple |
|---|---|---|---|
| **Variația mărimii fizice *x*** | $\Delta x = x_f - x_i$ | | „Variația temperaturii este 20 K”: $\Delta T = 20\text{K}$ |
| ***x* crește de *n* ori** | $x_f = n \cdot x_i$ | | „Viteza crește de 3 ori”: $v = 3v_0$ |
| ***x* scade de *n* ori** | $x_f = \frac{x_i}{n}$ | | „Înălțimea scade de 5 ori”: $h = \frac{h_0}{5}$ |
| ***x* crește cu o cantitate *x*₀** | $x_f = x_i + x_0$ | $x_0 = \Delta x$ | „Presiunea crește cu 0,2 atm”: $p_2 = p_1 + \Delta p,\ \Delta p = 0,2\text{atm}.$ |
| ***x* scade cu o cantitate *x*₀** | $x_f = x_i - x_0$ | $x_0 = -\Delta x$ | „Presiunea scade cu 0,4 atm”: $p_2 = p_1 + \Delta p,\ \Delta p = -0,4\text{atm}.$ |
| ***x* crește cu *n*% (creștere procentuală)** | $x_f = x_i + \frac{n}{100} x_i$ | $n\% = \frac{n}{100}$ | „Volumul crește cu 25%”: $V_2 = V_1 + \frac{25}{100} V_1$ |
| ***x* scade cu *n*% (descreștere procentuală)** | $x_f = x_i - \frac{n}{100} x_i$ | $n\% = \frac{n}{100}$ | „Energia cinetică scade cu 60%”: $E_{c2} = E_{c1} - \frac{60}{100} E_{c1}$ |
| **Variația relativă a lui *x* este variația lui *x* raportată la valoarea inițială** | $\frac{\Delta x}{x_i} = \frac{x_f - x_i}{x_i}$ | Se exprimă în procente | „Variația relativă a lungimii (alungirea relativă) este 20%”: $\frac{\Delta l}{l_0} = 20\% \Leftrightarrow \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{20}{100}$ |
| **Viteza de variație (în timp) a lui *x*** | $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ | Rata de creștere sau de scădere | „Viteza de variație a temperaturii este 8 K/s”: $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 8\frac{\text{K}}{\text{s}}$ |

## MĂRIMI FIZICE, RELAȚII MATEMATICE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

| *Mărime fizică / lege / teoremă / principiu* | *Formulă de definiție / relație matematică* | *Semnificații ale mărimilor fizice, unități de măsură în SI* |
|---|---|---|
| Vectorul viteză medie | $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ | $\Delta\vec{r}$ : vectorul deplasare (variația vectorului de poziție ) $\Delta t$ : durata (intervalul de timp) |
| Vectorul viteză momentană (instantanee) | $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, când $\Delta t \to 0$ | |
| Viteza medie (în mișcarea rectilinie) | $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ | $\Delta x$ : deplasare (variația coordonatei $x$) $\Delta t$ : durata (intervalul de timp) $[v]_{\mathrm{SI}} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ |
| Viteza momentană (instantanee) (în mișcarea rectilinie) | $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, când $\Delta t \to 0$ | |
| Viteză relativă | $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ | $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ : vitezele a două mobile față de un referențial fix (de exemplu, față de Pământ) $\vec{v}_{21}$ : viteza relativă a celui de-al doilea mobil față de primul |
| Vectorul accelerație medie | $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ | $\Delta\vec{v}$ : variația vectorului viteză $\Delta t$ : durata (intervalul de timp) |
| Vectorul accelerație momentană (instantanee) | $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, când $\Delta t \to 0$ | |
| Accelerația medie (în mișcarea rectilinie) | $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ | $\Delta v$ : variația vitezei $\Delta t$ : durata (intervalul de timp) $[a]_{\mathrm{SI}} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ |
| Accelerația momentană (instantanee) (în mișcarea rectilinie) | $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, când $\Delta t \to 0$ | |
| Mișcare rectilinie uniformă: legea/ecuația mișcării | $x = x_0 + v(t - t_0)$ | $x_0$ : coordonata inițială, la momentul inițial, $t_0$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $x$: coordonata la momentul $t$<br>$v$: viteza mobilului |
| Mişcare rectilinie uniform variată: legea/ecuaţia mişcării | $x = x_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \frac{a\left(t - t_0\right)^2}{2}$ | $x_0$: coordonata iniţială, la momentul iniţial, $t_0$<br>$x$: coordonata la momentul $t$<br>$v_0$: viteza iniţială, la momentul iniţial, $t_0$<br>$a$: acceleraţia mobilului |
| Mişcare rectilinie uniform variată: legea/ecuaţia vitezei | $v = v_0 + a\left(t - t_0\right)$ | $v_0$: viteza iniţială, la momentul iniţial, $t_0$<br>$v$: viteza la momentul $t$<br>$a$: acceleraţia mobilului |
| Mişcare rectilinie uniform variată: ecuaţia lui Galilei | $v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$ | $v_0$: viteza iniţială, la momentul iniţial, $t_0$, când coordonata mobilului este $x_0$.<br>$v$: viteza finală, momentul $t$, când coordonata mobilului este $x$.<br>$x - x_0 = \Delta x$: deplasarea mobilului |
| Principiul fundamental al dinamicii | $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | $\vec{F}$: vectorul forţă (forţa rezultantă)<br>$\left[F\right]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\mathrm{N}$ (Newton) |
| Forţa de inerţie, $\vec{F}_\mathrm{i}$ | $\vec{F}_\mathrm{i} = -m \cdot \vec{a}_{\mathrm{SRN}}$, $F_\mathrm{i} = m \cdot a_{\mathrm{SRN}}$ | $m$: masa corpului a cărui mişcare este studiată în raport cu un Sistem de Referinţă Neinerţial |

| | | |
|---|---|---|
| | | $\vec{a}_{\mathrm{SRN}}$ : accelerația Sistemului de Referință Neinerțial |
| Principiul acțiunilor reciproce | $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},\ F_{12} = F_{21}$ | $\vec{F}_{12}$ : forța cu care primul corp acționează asupra celui de-al doilea<br>$\vec{F}_{21}$ : forța cu care al doilea corp acționează asupra primului |
| Forța de frecare la alunecare, $F_{\mathrm{f}}$ | $F_{\mathrm{f}} = \mu N$ | $\mu$ : coeficientul de frecare la alunecare (adimensional)<br>$N$ : forța de apăsare normală la suprafața de contact |
| Unghiul de frecare la alunecare, $\varphi$ | $\mathrm{tg}\varphi = \mu$ | $\varphi$ : unghiul planului înclinat pe care corpul, lăsat liber, alunecă uniform |
| Legea deformărilor elastice (legea lui Hooke) | $\Delta l = \dfrac{Fl_0}{ES_0},\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$ | $\Delta l$ : deformare absolută<br>$F$ : forța deformatoare<br>$l_0$ : lungimea firului nedeformat<br>$S_0$ : aria secțiunii transversale a firului nedeformat<br>$E$ : modulul de elasticitate longitudinal / modulul lui Young (constantă de material)<br>$[E]_{\mathrm{SI}} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\mathrm{Pa}$ (Pascal)<br>$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ : deformare relativă (adimensională)<br>$\sigma = \dfrac{F}{S_0}$ : efort unitar |

| | | |
|---|---|---|
| | | $\left[\sigma\right]_{\mathrm{SI}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}=1\mathrm{Pa}$ (Pascal) |
| Constanta elastică a unui fir elastic omogen, $k$ | $k=\frac{ES_0}{l_0}$ | $\left[k\right]_{\mathrm{SI}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ |
| Forța elastică, $F_{\mathrm{e}}$ | $F_{\mathrm{e}}=k\Delta l$ | $k$: constanta elastică<br>$\Delta l$: deformare absolută |
| Constanta echivalentă serie, $k_{\mathrm{es}}$ | $k_{\mathrm{es}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}}$ | $k_i$: constantele elastice ale celor *n* resorturi/fire elastice grupate în serie |
| Constanta echivalentă paralel, $k_{\mathrm{ep}}$ | $k_{\mathrm{ep}}=\sum_{i=1}^{n}k_i$ | $k_i$: constantele elastice ale celor *n* resorturi/fire elastice grupate în paralel |
| Legea atracției universale (legea lui Newton) | $F=k\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$ | $k$: constanta atracției universale<br>$k\simeq 6,67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$<br>$m_1, m_2$: masele corpurilor (considerate punctiforme)<br>$r$: distanța dintre corpuri |
| Accelerația gravitațională la suprafața Pământului, $g$ | $g=k\frac{M_{\mathrm{P}}}{R_{\mathrm{P}}^2}$ | $M_{\mathrm{P}}$: masa Pământului<br>$R_{\mathrm{P}}$: raza Pământului |
| Accelerația gravitațională la înălțimea *h*, $g_h$ | $g_h=k\frac{M_{\mathrm{P}}}{\left(R_{\mathrm{P}}+h\right)^2}$ | $h$: înălțimea măsurată față de suprafața Pământului |
| Intensitatea câmpului gravitațional într-un punct al câmpului, $\vec{\Gamma}$ | $\Gamma=k\frac{M}{r^2},\quad \vec{\Gamma}=\frac{\vec{F}}{m}$ | *M*: masa corpului care creează câmpul gravitațional (masa sursei câmpului gravitațional)<br>*r*: distanța dintre centrul corpului care creează câmpul gravitațional și punctul în care se |

| | | |
|---|---|---|
| | | calculează intensitatea câmpului gravitațional<br>*m*: masa corpului de probă adus în punctul în care se calculează intensitatea câmpului gravitațional<br>$[\Gamma]_{SI} = \frac{N}{kg}$ |
| Lucrul mecanic al unei forțe constante – mărime de proces, *L* | $L = \vec{F} \cdot \vec{d}, \quad L = F \cdot d \cdot \cos\alpha$ | $\vec{F}$: vectorul forță<br>$\vec{d}$: vectorul deplasare<br>$\alpha$: unghiul dintre vectorul forță și vectorul deplasare<br>$[L]_{SI} = \mathrm{N \cdot m = 1J (Joule)}$ |
| Puterea mecanică medie, $P_m$ | $P_m = \frac{L}{\Delta t}$ | $L$: lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp $\Delta t$<br>$[P]_{SI} = \frac{J}{s} = 1\mathrm{W}$ (Watt) |
| Puterea mecanică momentană (instantanee), *P* | $P = \frac{L}{\Delta t}$, când $\Delta t \to 0$<br>$P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad P = F \cdot v \cdot \cos\alpha$ | $\vec{F}$: vectorul forță<br>$\vec{v}$: vectorul viteză momentană<br>$\alpha$: unghiul dintre vectorul forță și vectorul viteză momentană |
| Randamentul planului înclinat, $\eta$ | $\eta = \frac{L_{util}}{L_{consumat}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha + \mu}$ | $\alpha$: unghiul planului înclinat<br>$\mu$: coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat |
| Energia mecanică – mărime de stare, *E* | $E = E_c + E_p$ | $E_c$: energia cinetică<br>$E_p$: energia potențială (gravitațională sau/și elastică) |
| Energia cinetică, $E_c$ | $E_c = \frac{mv^2}{2}$ | $m$: masa corpului<br>$v$: viteza corpului |

| | | |
|---|---|---|
| Energia potențială gravitațională, $E_\text{p}$ | $E_\text{p} = mgh$ | $m$: masa corpului<br>$g$: accelerația gravitațională<br>$h$: înălțimea la care se află corpul față de nivelul ales de energie potențială gravitațională nulă |
| Energia potențială elastică, $E_\text{pe}$ | $E_\text{pe} = \dfrac{kx^2}{2}$ | $k$: constanta elastică a resortului/firului elastic<br>$x$: deformarea resortului/firului elastic față de starea de energie potențială elastică nulă |
| Teorema variației energiei cinetice | $\Delta E_\text{c} = L_\text{tot}$ | $\Delta E_\text{c} = E_\text{c2} - E_\text{c1}$: variația energiei cinetice<br>$L_\text{tot}$: lucrul mecanic al forței rezultante (lucru mecanic total) |
| Variația energiei potențiale, în câmp conservativ de forțe | $\Delta E_\text{p} = -L_\text{conservativ} \Rightarrow$<br>$\Delta E_{\text{p \_ grav.}} = -L_G$<br>$\Delta E_{\text{p \_ el.}} = -L_{Fe}$ | $\Delta E_\text{p} = E_\text{p2} - E_\text{p1}$: variația energiei potențiale (gravitaționale sau elastice)<br>$L_\text{conservativ}$: lucrul mecanic al forței conservative (greutate/forță elastică) |
| Variația energiei mecanice | $\Delta E = L_\text{neconservativ}$ | $\Delta E = E_2 - E_1$: variația energiei mecanice<br>$L_\text{neconservativ}$: lucrul mecanic al forțelor neconservative |
| Legea conservării energiei mecanice | $E = E_\text{c} + E_\text{p} = const.$ | Energia mecanică a unui sistem fizic izolat, în care acționează numai forțe conservative, rămâne constantă (se conservă). |

| | | |
|---|---|---|
| Impulsul punctului material, $\vec{p}$ | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ | $m$: masa punctului material<br>$\vec{v}$: viteza punctului material<br>$[p]_{SI} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{s} =$<br>$= \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ |
| Teorema variației impulsului punctului material | $\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$ | $\Delta\vec{p}$: variația impulsului punctului material<br>$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{H}$: impulsul forței rezultante, $\vec{F}$, care acționează asupra punctului material în intervalul de timp $\Delta t$ |
| Legea conservării impulsului punctului material | $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = const.$ | Impulsul punctului material izolat rămâne constant (se conservă). |
| Teorema variației impulsului sistemului de puncte materiale | $\Delta\vec{P} = \vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \Delta t$ | $\Delta\vec{P}$: variația impulsului total al sistemului de puncte materiale<br>$\vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \Delta t = \vec{H}_{\mathrm{ext}}$: impulsul rezultantei forțelor externe, $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$, care acționează asupra sistemului de puncte materiale în intervalul de timp $\Delta t$ |
| Legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale | $\vec{P} = const.$ sau $\vec{P}_{initial} = \vec{P}_{final}$ | Impulsul total al sistemului izolat de puncte materiale rămâne constant (se conservă). |
| Ciocnire plastică: conservarea impulsului | $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$ | $m_1\vec{v}_1, m_2\vec{v}_2$: impulsurile corpurilor imediat înainte de ciocnire<br>$(m_1 + m_2)\vec{u}$: impulsul corpului imediat după ciocnire |
| Ciocnire plastică: căldura degajată prin ciocnire, $Q$ | $Q = -\Delta E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c\_inițială}} - E_{\mathrm{c\_finală}}$ | $E_{\mathrm{c\_inițială}}$: energia cinetică a sistemului de |

| | | |
|---|---|---|
| | $Q = \frac{m_r v_r^2}{2} =$<br>$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{2}$ | corpuri imediat înainte de ciocnire<br>$E_{c\_finală}$ : energia cinetică a corpului imediat după ciocnire<br>$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ : masa redusă a sistemului ce corpuri<br>$v_r = v_2 - v_1$ : viteza relativă a unui corp față de celălalt înainte de ciocnire |
| Ciocnire perfect elastică: conservarea impulsului | $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ | $m_1\vec{v}_1, m_2\vec{v}_2$ : impulsurile corpurilor imediat înainte de ciocnire<br>$m_1\vec{u}_1, m_2\vec{u}_2$ : impulsurile corpurilor imediat după ciocnire |
| Ciocnire perfect elastică: conservarea energiei cinetice | $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$ | $\frac{m_1 v_1^2}{2}, \frac{m_2 v_2^2}{2}$ : energiile cinetice ale corpurilor imediat înainte de ciocnire<br>$\frac{m_1 u_1^2}{2}, \frac{m_2 u_2^2}{2}$ : energiile cinetice ale corpurilor imediat după ciocnire |
| Ciocnire perfect elastică unidirecțională: vitezele imediat după ciocnire, $u_1, u_2$ | Dacă vitezele inițiale sunt în același sens:<br>$u_1 = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1$<br>$u_2 = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2$<br><br>Dacă vitezele inițiale sunt în sensuri opuse:<br>$u_1 = 2\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1$ | Cazuri particulare (viteze inițiale în același sens):<br>*i)* ciocnire unidirecțională între două corpuri cu mase egale:<br>$u_1 = v_2, u_2 = v_1$<br>*ii)* ciocnire unidirecțională cu un *perete mobil,*<br>$m_2 \gg m_1 \Rightarrow$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $u_2 = 2\dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} + v_2$ | $u_1 = 2v_2 - v_1,\ \ u_2 = v_2$<br>*iii)* ciocnire unidirecțională cu un *perete fix*,<br>$m_2 \gg m_1, v_2 = 0 \Rightarrow$<br>$u_1 = -v_1,\ \ u_2 = 0$ |
| Echilibru de translație al punctului material sau al solidului rigid | $\sum \vec{F}_i = 0$ | Rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material (solidului rigid) aflat în echilibru de translație este nulă. |
| Momentul forței față de un punct, $\vec{M}$ | $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad M = Fr\sin\alpha$ | $\vec{r}:$ vectorul de poziție al originii forței<br>$r\sin\alpha = b:$ brațul forței<br>$\alpha:$ unghiul dintre vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$<br>$[M]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ |
| Echilibru de rotație al solidului rigid | $\sum \vec{M}_i = 0$ | Momentul rezultant al forțelor aplicate solidului rigid aflat în echilibru de rotație este nul. |

# MIȘCARE ȘI REPAUS

## MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

**1.** **/0/** O piesă metalică este ridicată uniform cu ajutorul unei macarale la înălțimea $h = 12\text{m},$ în intervalul de timp $\Delta t = 1\text{min}.$ Cu ce viteză a fost ridicată piesa? Exprimați viteza și în km/h.

**2.** **/0/** Viteza medie a unui tren între două stații feroviare este $v_{\text{m}} = 54\text{km/h}.$ Calculați distanța dintre stații dacă trenul pleacă dintr-o stație la ora 14 și 15 minute și oprește în cealaltă stație la ora 15 și 55 minute.

**3.** **/0/** Viteza sunetului în aer este aproximativ $v_{\text{s}} = 340\text{m/s}.$ Un fulger este însoțit de un sunet puternic (tunet) pe care un om îl aude după un interval de timp $\Delta t = 5\text{s}$ de la observarea fulgerului. Aflați la ce distanță s-a produs fulgerul. Intervalul de timp în care se propagă lumina până la observator este neglijabil.

**4.** **/0/** Doi oameni care vorbesc unul cu altul se află la o distanță $d = 10\text{m}.$ Aflați în cât timp recepționează un om sunetele emise de interlocutorul său, dacă viteza de propagare a sunetului în aer este $v_{\text{s}} = 340\text{m/s}.$

**5.** **/0/** Un avion supersonic a zburat $5576\text{km}$ pe ruta Londra – New York cu viteza Mach 2 (de două ori mai mare decât viteza sunetului, $v_{\text{s}} = 340\text{m/s}$ ). Calculați durata zborului.

**6.** **/0/** Viteza de propagarea luminii în vid este $c = 3\cdot 10^{8}\,\text{m/s}.$ Dacă distanța medie Pământ – Soare este $d = 149{,}6\cdot 10^{6}\,\text{km},$ aflați în cât timp se propagă lumina de la Soare la Pământ.

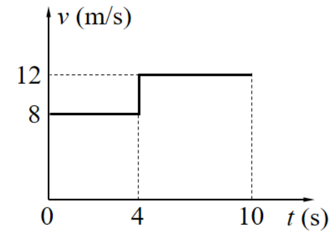
**7.** **/0/** Impulsurile nervoase se propagă cu viteze diferite în funcție de tipul de fibră prin care se deplasează. Impulsul pentru „atingere” se propagă cu viteza $v_{\text{a}} = 62\text{m/s},$ iar cel pentru „durere” cu viteza $v_{\text{d}} = 1{,}2\text{m/s}.$ Dacă un om se lovește accidental la un deget de la picior, aflați timpul necesar fiecărui tip de impuls pentru a ajunge la creier și întârzierea între cele două senzații percepute de om. Considerați că distanța de la degetul accidentat la creier este $d = 1{,}75\text{m}$ și că impulsurile nervoase se propagă direct de la deget la creier.

***Viteza medie***

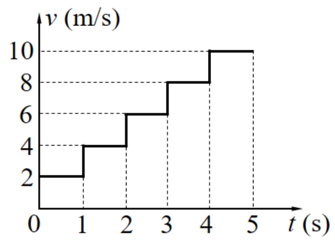
**8.** **/1/** O mașină de curse se deplasează timp de $3\text{minute}$ cu viteza $v_1 = 108\text{km/h}$ și în continuare timp de $7\text{minute}$ cu viteza $v_2 = 180\text{km/h}.$ Aflați viteza medie a mașinii pe toată durata deplasării.

**9. /1/** Un mobil se deplasează un timp $t_1 = 10\text{s}$ cu viteza $v_1 = 2\text{m/s}$, apoi un timp $t_2 = 20\text{s}$ cu viteza $v_2 = 5\text{m/s}$ și în continuare un timp $t_3 = 10\text{s}$ cu viteza $v_3 = 3\text{m/s}$. Să se determine viteza medie a mobilului pe toată durata mișcării.

**10. /1/** În graficul din figura alăturată este reprezentată viteza unui mobil în funcție de timp. Să se determine distanța parcursă de mobil și viteza medie a mobilului pe toată durata mișcării, pentru $t \in [0;10\text{s}]$.




**11. /1/** În graficul din figura alăturată este reprezentată viteza unui mobil în funcție de timp. Să se determine distanța parcursă de mobil și viteza medie a mobilului pe toată durata mișcării, pentru $t \in [0;5\text{s}]$.




**12. /1/** Un automobil a parcurs distanța dintre două orașe cu viteza $v_1 = 90\text{km/h}$, iar la întoarcere viteza sa a fost $v_2 = 60\text{km/h}$. Care a fost viteza medie a automobilului?

**13. /1/** Un biciclist a parcurs o distanță cu viteza $v_1 = 10\text{km/h}$ și în continuare o distanță de două ori mai mare cu viteza $v_2 = 5\text{km/h}$. Să se determine viteza medie a biciclistului pe întreaga distanță parcursă.

**14. /1/** Un camion a parcurs o fracțiune $f = 25\,\%$ din drumul său cu viteza $v_1 = 80\text{km/h}$, iar restul drumului cu viteza $v_2 = 60\text{km/h}$. Calculați viteza medie a camionului pe întreaga distanță parcursă.

**15. /1/** Un automobil se deplasează pe prima jumătate din drumul său cu viteza $v_1 = 18\text{m/s}$. Pe cea de-a doua jumătate de drum automobilul se deplasează cu o altă viteză constantă, astfel încât durata mișcării este cu $f = 20\,\%$ mai mică decât pe prima jumătate de drum. Calculați viteza medie a automobilului pe întreaga distanță parcursă.

**16. /2/** Un ciclist se deplasează pe prima jumătate din drumul său cu viteza $v_1 = 4\text{m/s}$, iar pe cea de-a doua jumătate de drum se deplasează astfel: jumătate din timpul rămas cu viteza $v_2 = 5\text{m/s}$, iar cealaltă jumătate de timp cu viteza $v_3 = 7\text{m/s}$. Calculați viteza medie a ciclistului pe întreaga distanță parcursă.

**17. /2/** Un ciclist se deplasează între două localități. Prima jumătate din durata deplasării ciclistul are viteza $v_1 = 4\text{m/s},$ iar în cea de-a doua jumătate de timp se deplasează astfel: jumătate din distanța rămasă cu viteza $v_2 = 5\text{m/s},$ iar cealaltă jumătate cu viteza $v_3 = 7\text{m/s}.$ Calculați viteza medie a ciclistului pe întreaga distanță parcursă.

***Viteze relative (aplicații în cazul unidimensional)***

**18. /0/** Un camion se deplasează rectiliniu pe o autostradă cu viteza $v_1 = 85\text{km/h}$ și este depășit de un automobil cu viteza $v_2 = 110\text{km/h}.$ Aflați:

**a.** viteza relativă a automobilului față de camion și precizați sensul acesteia;
**b.** viteza relativă a camionului față de automobil și precizați sensul acesteia.

**19. /0/** Pe o șosea rectilinie trec unul pe lângă altul două camioane, venind din sensuri opuse, cu vitezele $v_1 = 85\text{km/h}$ și $v_2 = 105\text{km/h}.$ Aflați:

**a.** viteza relativă a celui de-al doilea camion față de primul și precizați sensul acesteia;
**b.** viteza relativă a primului camion față de al doilea și precizați sensul acesteia.

**20. /0/** Pe o cale ferată rectilinie se deplasează un tren cu viteza $v_{\text{TP}} = 65\text{km/h}.$ Un călător aflat în tren se deplasează, față de tren, cu viteza $v_{\text{CT}} = 3\text{km/h}.$ Aflați viteza călătorului față de Pământ și precizați-i sensul dacă acesta se deplasează:

**a.** spre locomotivă;
**b.** spre ultimul vagon al trenului.

**21. /1/** Viteza unui biciclist este $v = 28{,}8\text{km/h},$ iar viteza vântului este $v_0 = 3\text{m/s}.$ Ce viteză a vântului înregistrează biciclistul dacă:

**a.** vântul îi suflă din față;
**b.** vântul îi suflă din spate.

**22. /1/** Două trenuri se deplasează în sensuri opuse, pe linii paralele, cel de al doilea tren având viteza $v_2 = 54\text{km/h}.$ Un pasager din primul tren observă că trenul al doilea, având lungimea $L = 140\text{m},$ trece prin dreptul său în intervalul de timp $\Delta t = 4\text{s}.$ Să se determine viteza primului tren.

**23. /1/** Când două camioane se deplasează rectiliniu uniform unul spre celălalt, distanța dintre ele se micșorează cu viteza $v_{\text{d1}} = 140\text{km/h}.$ Dacă cele două camioane se deplasează cu aceleași viteze dar în același sens, distanța dintre ele se micșorează cu viteza $v_{\text{d2}} = 40\text{km/h}.$ Aflați vitezele celor două camioane.

**24.** **/1/** O barcă cu motor parcurge distanța $d = 100\text{km}$ dintre două porturi fluviale în sensul curentului în timpul $t_1 = 2\text{h}$, iar împotriva curentului în timpul $t_2 = 5\text{h}$. Să se determine viteza apei și viteza bărcii față de apă.

**25.** **/1/** O scară rulantă ridică un om aflat în repaus pe scară în timpul $t_1 = 30\text{s}$, iar pe scara imobilă omul urcă în timpul $t_2 = 20\text{s}$. Care este timpul minim în care urcă omul scara mobilă?

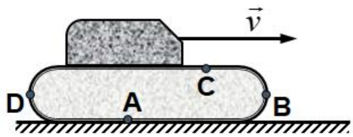
**26.** **/2/** O barcă cu motor se deplasează în sensul de curgere a unui râu. La un moment dat din barcă este lăsat pe apă un colac de salvare, iar după timpul $\tau = 2\text{ore}$ barca se întoarce și întâlnește colacul la distanța $D = 6\text{km}$ față de locul de lansare. Știind că puterea motorului bărcii a fost aceeași în ambele sensuri de deplasare, aflați viteza de curgere a râului.

***Viteze relative (aplicații în cazul bidimensional)***

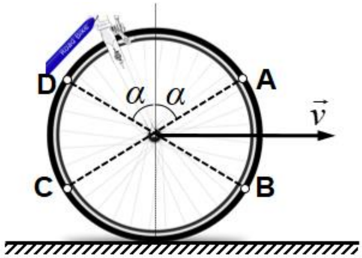
**27.** **/1/** Un automobil se deplasează pe o șosea rectilinie spre Nord, cu viteza $v_A = 100\text{km/h}$, iar un elicopter zboară pe o direcție perpendiculară pe șosea, spre Est, cu viteza $v_E = v_A$. Să se determine viteza elicopterului față de automobil și orientarea acestei viteze față de direcția Sud-Nord.

**28.** **/1/** Un fluviu cu lățimea $L = 750\text{m}$ curge cu viteza $v_0 = 4\text{m/s}$. Un pescar traversează fluviul cu o barcă cu viteza $v = 3\text{m/s}$ față de apă, orientată perpendicular pe malurile fluviului. Aflați:
**a.** viteza bărcii față de mal;
**b.** distanța parcursă de barcă pe durata traversării fluviului.

**29.** **/1/** Un tractor cu șenile se deplasează rectiliniu uniform cu viteza $v = 20\text{km/h}$. Aflați ce viteze momentane au, față de sol, șenilele notate cu **A**, **B**, **C** și **D** în figura alăturată.




**30.** **/2/** O bicicletă se deplasează cu viteza $v = 10\text{m/s}$. Aflați ce viteze momentane au, față de sol, punctele notate cu **A**, **B**, **C** și **D** în figura alăturată, situate la capetele diametrelor ce formează unghiul $\alpha = 60^\circ$ cu verticala.




**31.** **/2/** O pasăre migratoare zboară rectiliniu cu viteza $v = 13\text{m/s}$, față de aer (în atmosferă fără vânt). Știind că vântul suflă de la Vest la Est cu viteza

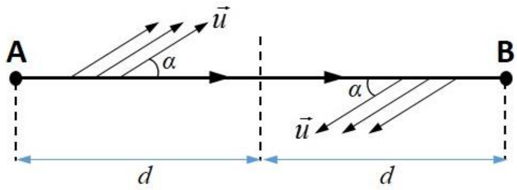
$v_0 = 18\text{km/h}$, iar pasărea zboară de la Nord spre Sud, de-a lungul unui meridian, aflați:

**a.** viteza păsării față de sol;

**b.** unghiul făcut de pasăre cu direcția meridianului.

**32.** **/2/** Un aeroplan zboară de-a lungul unui meridian, spre Nord, cu viteza $v = 16\text{m/s}$. Știind că vântul suflă dinspre Nord-Est cu viteza $v_0 = v$, aflați viteza vântului față de aeroplan.

**33.** **/3/** Un avion zboară pe distanța $2d$ între două aeroporturi A și B, având viteza $v_0$ față de aer (în atmosferă fără vânt). În timpul zborului, vântul bate cu viteza $u$, orientată sub unghiul $\alpha$ față de direcția de zbor. Sensul vitezei vântului se schimbă la jumătatea distanței AB, așa cum prezentăm în figura alăturată.




**a.** Aflați sinusul unghiului de înclinare a avionului față de direcția AB, pe fiecare porțiune a zborului.

**b.** Aflați valorile unghiului $\alpha$ pentru care durata zborului este minimă, respectiv maximă și scrieți expresiile acestor durate.

### *Vectorul viteză medie*

**34.** **/1/** Un ciclist se deplasează pe o pistă circulară de rază $R = 50\text{m}$, cu viteza constantă $v = 6{,}28\text{m/s}$. Calculați:

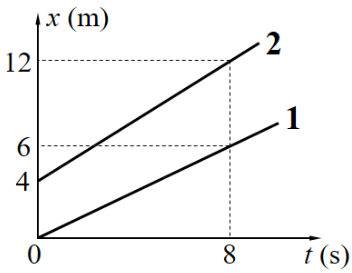
**a.** intervalul de timp în care ciclistul descrie o porțiune de pistă de forma unui semicerc;

**b.** modulul vectorului viteză medie în intervalul de timp în care ciclistul descrie o porțiune de pistă de forma unui semicerc.

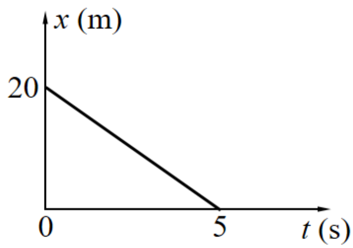
### *Legea mișcării. Întâlniri. Grafice*

**35.** **/1/** Legile mișcării a două mobile sunt: $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = 7$, unde coordonata și timpul sunt exprimate în unități ale S.I. Să se reprezinte grafic legile mișcării și să se afle locul și momentul întâlnirii mobilelor.

**36.** **/1/** În figura alăturată sunt reprezentate graficele mișcărilor a două mobile, notate **1** și **2**. Să se scrie ecuațiile mișcărilor celor două mobile și să se reprezinte grafic vitezele lor în funcție de timp.



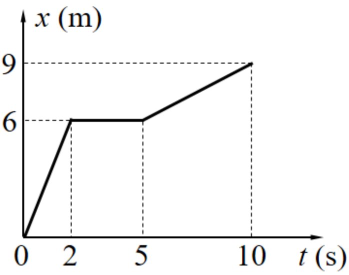
**37.** **/1/** În figura alăturată este reprezentat graficul mișcării unui mobil. Să se scrie legea mișcării și să se reprezinte grafic viteza mobilului în funcție de timp.




**38.** **/1/** Un mobil se deplasează de-a lungul axei de coordonate *Ox*, iar în figura alăturată este reprezentat graficul coordonatei mobilului în funcție de timp. Se cer:

**a.** viteza mobilului în intervalele de timp $(0;2\text{s})$, $(2\text{s};5\text{s})$ și $(5\text{s};9\text{s})$;

**b.** viteza medie a mobilului pe toată durata mișcării.

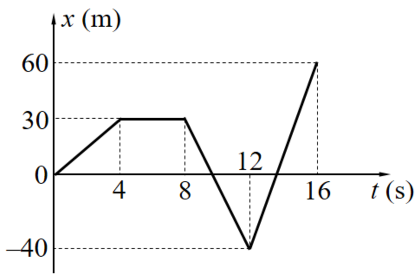



**39.** **/1/** Un mobil se deplasează de-a lungul axei de coordonate *Ox*, iar în figura alăturată este reprezentat graficul coordonatei mobilului în funcție de timp. Se cer:

**a.** viteza mobilului în intervalele de timp $(0{,}4\text{s})$, $(4\text{s};8\text{s})$, $(8\text{s};12\text{s})$ și $(12\text{s},16\text{s})$;

**b.** distanța totală parcursă de mobil;

**c.** viteza medie a mobilului pe toată durata mișcării.




**40.** **/1/** Două autovehicule se deplasează rectiliniu conform legilor de mișcare: $x_1 = 20t$ și $x_2 = 600 - 10t$, ecuații în care coordonata și timpul sunt exprimate în unități ale S.I.

**a.** Să se reprezinte grafic legile mișcării.

**b.** Să se determine momentul întâlnirii mobilelor coordonata punctului de întâlnire.

**c.** Ce reprezintă coeficientul lui *t* din legile de mișcare?

**41.** **/1/** Din originea axei *Ox* pleacă un mobil cu viteza $v_1 = 2\text{m/s}$, iar dintr-un punct aflat la distanța $x_0 = 10\text{m}$ de originea axei pleacă în același moment și în același sens un alt mobil cu viteza $v_2 = 1\text{m/s}$.

**a.** Să se reprezinte grafic legile mișcării.

**b.** Să se determine momentul întâlnirii mobilelor și coordonata punctului de întâlnire.

**42.** **/1/** Din originea axei *Ox* pleacă un mobil cu viteza $v_1 = 2\text{m/s},$ iar după un timp $\tau = 2\text{s},$ dintr-un punct aflat la distanța $x_0 = 2\text{m}$ de originea axei, pleacă în același sens un alt mobil cu viteza $v_2 = 4\text{m/s}.$

**a.** Să se reprezinte grafic legile mișcării.

**b.** Să se determine momentul întâlnirii mobilelor și coordonata punctului de întâlnire.

## MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

**43.** **/0/** Care este timpul necesar unui vehicul pentru a-și mări viteza de la $v_1 = 16\text{m/s}$ până la $v_2 = 20\text{m/s},$ cu accelerația $a = 0,2\text{m/s}^2.$

**44.** **/0/** Calculați accelerația medie a unui camion care, pornind de la un semafor, atinge viteza $v = 72\text{km/h}$ în timp de 1 min. și 40 s.

**45.** **/0/** Un avion care aterizează atinge pista cu viteza $v_0 = 216\,\text{km/h}$ și oprește în timp de $2\,\text{min}.$ Aflați accelerația avionului, viteza medie și distanța parcursă pe pistă până la oprire.

**46.** **/0/** Un dragster (mașină de curse de mare putere) poate atinge o accelerație medie de $26\,\text{m/s}^2.$ Considerând că dragsterul pornește din repaus și își menține accelerația constantă, aflați viteza atinsă și distanța parcursă după $4\,\text{s}$ de la plecare.

**47.** **/0/** Pornind din repaus, un automobil parcurge o distanță de $100\text{m}$ în timp de $10\text{s}.$ Să se determine accelerația și viteza automobilului după parcurgerea acestei distanțe.

**48.** **/0/** Ce distanță a parcurs un automobil în timp ce viteza sa a crescut de la $v_1 = 10\text{m/s}$ la $v_2 = 20\text{m/s},$ accelerația sa fiind $a = 2\text{m/s}^2.$

**49.** **/1/** Un camion pornește cu accelerația $a = 2\text{m/s}^2.$ La ce distanță viteza sa atinge valoarea $v = 20\text{m/s}$ și care este valoarea vitezei la mijlocul acestei distanțe?

**50.** **/1/** Ce accelerație trebuie să aibă un automobil pentru a-și mări viteza de la $v_1 = 36\text{km/h}$ la $v_2 = 72\text{km/h},$ pe o distanță $d = 100\text{m}$ și care este valoarea vitezei la mijlocul acestei distanțe?

**51.** **/0/** Un autoturism a frânat pe o distanță $d = 100\text{m}$ într-un timp $t = 10\text{s}.$ Care a fost viteza autoturismului înainte de frânare?

**52. /0/** Un camion se deplasează cu viteza $v_0 = 54\text{km/h}$. Observând un obstacol șoferul frânează cu accelerația $a = -1\text{m/s}^2$. În cât timp și pe ce distanță va opri camionul?

**53. /0/** Un vagon a început să frâneze la viteza $v_0 = 72\text{km/h}$ și s-a oprit după un timp $t = 20\text{s}$. Să se determine accelerația și distanța parcursă de vagon până la oprire.

**54. /0/** Un vehicul frânează cu accelerația $a = -0,5\text{m/s}^2$ și după timpul $t = 30\text{s}$ se oprește. Să se determine viteza inițială și distanța parcursă de vehicul până la oprire.

**55. /0/** Pentru a testa eficiența anvelopelor la frânare, un automobil este oprit cu roțile blocate de la viteza inițială $v_0 = 108\text{km/h}$. S-au măsurat timpii de oprire: $t_1 = 5\text{s}$ pe asfaltul uscat, $t_2 = 10\text{s}$ pe asfaltul ud și $t_3 = 30\text{s}$. pe zăpadă. Aflați, în fiecare caz, accelerația și distanța până la oprire.

**56. /1/** Un automobil care se deplasează cu viteza $72\text{km/h}$ frânează cu roțile blocate și se oprește după ce parcurge $80\text{m}$. Dacă automobilul s-ar fi deplasat cu o viteză de două ori mai mare, aflați noua distanță parcursă până la oprire.

**57. /1/** Un corp este lansat pe o suprafață orizontală cu viteza inițială $v_0 = 8\text{m/s}$. După un timp $t_1 = 5\text{s}$ viteza corpului este $v_1 = 4\text{m/s}$. Să se determine:

**a.** viteza corpului după timpul $t_2 = 8\text{s}$ din momentul lansării și distanța parcursă în acest timp;

**b.** după cât timp și la ce distanță față de locul de lansare se oprește corpul.

**58. /2/** Un corp parcurge în mișcare uniform accelerată distanța $d = 420\text{m}$. Prima jumătate de drum este parcursă în timpul $t_1 = 14\text{s}$, iar cea de-a doua jumătate de drum în timpul $t_2 = 6\text{s}$. Aflați accelerația corpului.

***A n-a secundă de mișcare***

**59. /1/** Un automobil pornește de la semafor cu accelerația $a = 0,5\text{m/s}^2$. Aflați distanța parcursă de automobil în prima, a doua și a treia secundă a mișcării.

**60. /1/** Un automobil frânează cu accelerația $a = -2\text{m/s}^2$, având inițial viteza $v_0 = 10\text{m/s}$. Aflați distanța parcursă de automobil în prima, a doua și a treia secundă a mișcării.

**61. /1/** Un automobil care se deplasează cu viteza $v_0 = 10\text{m/s}$ începe să accelereze până la viteza $v = 20\text{m/s}$ într-un interval de timp $\Delta t = 5\text{s}$. Aflați viteza medie a automobilului în prima, a doua și ultima secundă a mișcării accelerate.

**62. /1/** Un automobil care se deplasează cu viteza $v_0 = 20\text{m/s}$ frânează până la oprire într-un interval de timp $\Delta t = 10\text{s}$. Aflați viteza medie a automobilului în prima, a doua și ultima secundă a mișcării decelerate.

**63. /1/** Un camion se deplasează uniform accelerat cu viteză inițială nulă, parcurgând în prima secundă distanța $d_1 = 0,4\text{m}$. Aflați viteza și distanța parcursă de camion după $t = 5\text{s}$ de mișcare.

**64. /1/** Un mobil care se deplasează uniform accelerat parcurge în prima secundă distanța $d_1 = 3\text{m}$, iar în a doua secundă distanța $d_2 = 4\text{m}$. Aflați:
**a.** accelerația mobilului;
**b.** viteza inițială a mobilului.

**65. /2/** Un corp lansat pe o suprafață orizontală cu viteza inițială $v_0 = 22\text{m/s}$ se deplasează uniform încetinit datorită frecării, parcurgând în secunda a cincea distanța de $d = 4\text{m}$. Aflați:
**a.** accelerația corpului;
**b.** timpul de oprire;
**c.** distanța parcursă până la oprire.

**66. /2/** Un camion se deplasează uniform accelerat cu viteză inițială nulă, parcurgând astfel o distanță *D*. Știind că în ultima secundă a mișcării camionul a parcurs o fracțiune $f = 19\%$ din distanța *D*, aflați durata totală a mișcării.

### *Legi de mișcare. Întâlniri. Grafice*

**67. /0/** Mișcarea rectilinie a unui mobil este descrisă de ecuația $x = 6 + 30t - 2t^2$, în care timpul și coordonata sunt exprimate în unități S.I. Aflați:
**a.** viteza mobilului la momentul $t = 5\text{s}$;
**b.** viteza medie în primele $5\text{s}$ de mișcare.

**68. /0/** Ecuația vitezei unui mobil este $v = 3 + 2t$, în care timpul și viteza sunt exprimate în unități S.I. Dacă inițial coordonata mobilului a fost $x_0 = 10\text{m}$, aflați:
**a.** coordonata mobilului la momentul $t = 5\text{s}$;
**b.** viteza medie în primele $5\text{s}$ de mișcare.

**69. /1/** Ecuația mișcării rectilinii a unui mobil este $x = 2 + 9t - t^2$, în care timpul și coordonata sunt exprimate în unități S.I. Aflați:
**a.** după cât timp viteza mobilului este egală cu o treime din viteza inițială;
**b.** spațiul parcurs de mobil în cea de-a treia secundă de mișcare;
**c.** viteza medie a mobilului în primele trei secunde ale mișcării.

**70. /1/ /EXCEL/** Legea mişcării rectilinii a unui mobil este $x = 4 + 6t - t^2$, în care timpul şi coordonata sunt exprimate în unități S.I.

**a.** Aflați expresia vitezei momentane ($v$ în funcție de $t$) și expresia accelerației momentane ($a$ în funcție de $t$). Precizați tipul mişcării mobilului.

**b.** Calculați viteza mobilului la momentele: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s.

**c.** Reprezentați grafic în EXCEL coordonata, viteza şi accelerația în funcție de timp, pentru $t \in [0{,}3\text{s}]$.

**71. /1/ /EXCEL/** Două mobile pornesc simultan, pe aceeași direcție și în același sens, din punctele **A** și **B** aflate la distanța $d = 55\text{m}$ unul de celălalt. Primul mobil pornește din **A** spre **B**, cu viteza inițială $v_{01} = 4\text{m/s}$, având accelerația $a_1 = 2\text{m/s}^2$. Cel de-al doilea mobil, care pornește din B, se deplasează rectiliniu uniform cu viteza $v_B = 36\text{km/h}$. Aflați:

**a.** momentul de timp la care se întâlnesc cele două mobile;

**b.** distanța, față de punctul **A** la care se întâlnesc cele două mobile;

**c.** reprezentarea grafică în EXCEL a ecuațiilor de mişcare ale celor două mobile, pentru $t \in [0{,}20\text{s}]$.

**72. /1/ /EXCEL/** Două mobile pleacă din același punct, pe aceeași direcție și în același sens, cu vitezele inițiale $v_{01} = 4\text{m/s}$, respectiv $v_{02} = 3\text{m/s}$ și accelerațiile $a_1 = 2\text{m/s}^2$, respectiv $a_2 = 3\text{m/s}^2$. Al doilea mobil pleacă mai târziu decât primul cu un interval de timp $\tau = 2\text{s}$. Se cer:

**a.** momentul întâlnirii mobilelor și coordonata punctului de întâlnire;

**b.** vitezele medii ale mobilelor de la plecare până la întâlnire;

**c.** reprezentarea grafică în EXCEL a ecuațiilor de mişcare ale celor două mobile, pentru $t \in [0{,}20\text{s}]$.

**73. /1/ /EXCEL/** Ecuațiile mişcărilor a două mobile sunt: $x_1 = 200 + 30t - t^2$ și $x_2 = 50 + 20t + 1{,}5t^2$. Se cer:

**a.** momentul întâlnirii mobilelor și coordonata punctului de întâlnire;

**b.** viteza relativă a celui de-al doilea mobil față de primul în momentul întâlnirii lor;

**c.** reprezentarea grafică în EXCEL a ecuațiilor de mişcare ale celor două mobile, pentru $t \in [0{,}20\text{s}]$.

### *Mişcare neuniform variată*

**74. /2/** Ecuația vitezei unui mobil este $v = v_0 + bt^2$, în care $v_0 = 4\text{cm/s}$ și $b = 2\text{cm/s}^3$. Aflați:

**a.** viteza mobilului la momentul $t = 5\text{s}$;

**b.** accelerația mobilului la momentul $t = 5\text{s}$;

**c.** accelerația medie în primele $5\text{s}$ de mișcare.

***Mișcări pe verticală în câmp gravitațional (fără frecări)***

**75. /0/** O bilă de mici dimensiuni cade liber de la înălțimea $h = 20\text{m}$. Să se afle viteza cu care atinge solul și timpul de cădere.

**76. /0/** O bilă de mici dimensiuni este aruncată vertical în jos cu viteza $v_0 = 15\text{m/s}$, de la înălțimea $h = 20\text{m}$. Să se afle viteza cu care atinge solul și timpul de cădere.

**77. /0/** O piatră lăsată să cadă liber atinge solul după un timp $t_c = 4\text{s}$. Aflați înălțimea de la care a căzut piatra și viteza cu care aceasta atinge solul.

**78. /0/** O piatră este lansată vertical în sus, de la nivelul solului, cu viteza $v_0 = 30\text{m/s}$. Să se afle înălțimea maximă atinsă de piatră și timpul de urcare la înălțimea maximă.

**79. /0/** Să se afle cu ce viteză a fost lansată vertical în sus o săgeată, de la nivelul solului, dacă la înălțimea $h = 10\text{m}$ viteza săgeții este $v = 5\text{m/s}$.

**80. /1/** O minge de tenis de câmp este lansată vertical în sus de la nivelul solului cu viteza inițială $v_0 = 20\text{m/s}$. Să se determine:

**a.** timpul de urcare și înălțimea maximă la care ajunge mingea;
**b.** timpul după care mingea revine în punctul de lansare;
**c.** viteza mingii în momentul în care atinge solul.
**d.** momentele de timp la care mingea are viteza $v_1 = 10\text{m/s}$.

**81. /1/** După cât timp revine pe sol o săgeată care, fiind lansată vertical în sus de la nivelul solului, ajunge la înălțimea maximă $H = 45\text{m}$? La ce înălțime maximă se va ridica săgeata dacă viteza sa inițială este mărită de $n = 2\text{ori}$?

**82. /1/** Un pachet cade liber de la înălțimea $H = 70\text{m}$ și parcurge astfel o distanță $h = 20\text{m}$, după care își continuă mișcarea uniform până pe sol. Să se afle durata totală a căderii pachetului.

**83. /1/** De la înălțimea $h = 120\text{m}$ este eliberată o sferă de mici dimensiuni, dintr-o dronă care urcă cu viteza $v_0 = 10\text{m/s}$. Aflați:

**a.** viteza sferei la suprafața solului;
**b.** intervalul de timp în care sfera se află în mișcare.

**84. /2/** Un pachet este eliberat dintr-un elicopter aflat în repaus la o anumită înălțime. Pachetul parcurge în ultimele $\tau = 2\text{s}$ de cădere o distanță egală cu o fracțiune $f = 19\%$ din înălțimea de la care a fost eliberat. Aflați:

**a.** durata totală a căderii pachetului;

**b.** înălțimea la care se află elicopterul.

**85.** **/2/** Pe o planetă oarecare cad liber două corpuri, unul după altul, de la aceeași înălțime, $H = 144\text{m}$. Al doilea corp începe să cadă în momentul în care primul corp a parcurs distanța $h = 25\text{m}$. Aflați distanța dintre corpuri în momentul în care primul corp atinge suprafața planetei.

**86.** **/2/ /EXCEL/** Două corpuri sunt lansate vertical în sus, în același timp, cu vitezele inițiale $v_{01} = 25\text{m/s}$ și respectiv $v_{02} = 20\text{m/s}$. Primul corp este aruncat de la nivelul solului, iar cel de-al doilea de la înălțimea $h = 15\text{m}$. Se cer:
**a.** după cât timp se întâlnesc cele două corpuri;
**b.** înălțimea la care se întâlnesc cele două corpuri;
**c.** vitezele corpurilor în momentul întâlnirii;
**d.** reprezentarea grafică în EXCEL a coordonatelor celor două corpuri în funcție de timp, pentru $t \in [0; 4,6\text{s}]$.

**87.** **/2/ /EXCEL/** Un corp este aruncat vertical în jos dintr-un turn de la înălțimea $h = 150\text{m}$, cu viteza inițială $v_{01} = 10\text{m/s}$. În același timp este lansat vertical în sus, de la baza turnului, un al doilea corp, cu viteza inițială $v_{02} = 40\text{m/s}$. Se cer:
**a.** după cât timp se întâlnesc cele două corpuri;
**b.** înălțimea la care se întâlnesc cele două corpuri;
**c.** vitezele corpurilor în momentul întâlnirii;
**d.** reprezentarea grafică în EXCEL a coordonatelor celor două corpuri în funcție de timp, pentru $t \in [0; 5\text{s}]$.

**88.** **/2/ /EXCEL/** Două corpuri sunt aruncate vertical în sus, de la nivelul solului, cu vitezele inițiale $v_{01} = 20\text{m/s}$ și respectiv $v_{02} = 25\text{m/s}$, al doilea corp fiind aruncat după $\tau = 1\text{s}$ de la lansarea primului corp. Se cer:
**a.** după cât timp se întâlnesc cele două corpuri;
**b.** înălțimea la care se întâlnesc cele două corpuri;
**c.** vitezele corpurilor în momentul întâlnirii;
**d.** reprezentarea grafică în EXCEL a coordonatelor celor două corpuri în funcție de timp, pentru $t \in [0,4\text{s}]$.

**89.** **/3/** O bilă de mici dimensiuni este lăsată să cadă de la înălțimea $H = 20\text{m}$ deasupra unei suprafețe orizontale rigide. La fiecare ciocnire a bilei cu suprafața, bila se întoarce cu o viteză egală cu o fracțiune $f = 80\%$ din viteza pe care a avut-o imediat înainte de ciocnire. Procesul se repetă identic până la oprirea bilei, iar durata ciocnirilor cu suprafața orizontală se consideră neglijabilă. Aflați:
**a.** durata totală a mișcării bilei;
**b.** distanța totală parcursă de bilă.

### *Aruncări pe orizontală sau oblice în câmp gravitațional (fără frecări)*

**90.** **/2/** O săgeată de mici dimensiuni este lansată dintr-un turn pe direcție orizontală cu viteza $v_0 = 30\text{m/s},$ de la înălțimea $H = 80\text{m}.$ Aflați:

**a.** după cât timp atinge săgeata solul;
**b.** distanța, față de baza turnului, la care săgeata atinge solul;
**c.** viteza săgeții imediat înainte de a atinge solul;
**d.** unghiul sub care săgeata atinge solul, față de direcția verticală.

**91.** **/2/ /EXCEL/** O săgeată de mici dimensiuni este lansată dintr-un turn pe direcție orizontală cu viteza $v_0 = 30\text{m/s},$ de la înălțimea $H = 80\text{m}.$ Se cer:

**a.** să se scrie ecuația traiectoriei săgeții, $y = f(x);$
**b.** să se reprezinte grafic, în EXCEL, traiectoria săgeții.

**92.** **/2/** Un proiectil de mici dimensiuni este lansat de la nivelul solului cu viteza $v_0 = 40\text{m/s},$ sub unghiul $\alpha = 37^\circ$ față de direcția orizontală $\left(\sin 37^\circ \simeq 0,6\right).$
Aflați:

**a.** după cât timp atinge proiectilul solul;
**b.** distanța, față de punctul de lansare, la care proiectilul atinge solul („bătaia”);
**c.** înălțimea maximă atinsă de proiectil;
**d.** viteza proiectilului imediat înainte de a atinge solul;
**e.** unghiul sub care proiectilul atinge solul, față de direcția orizontală;
**f.** unghiul sub care ar trebui lansat proiectilul pentru ca bătaia să fie maximă.

**93.** **/2/ /EXCEL/** Un proiectil de mici dimensiuni este lansat de la nivelul solului cu viteza $v_0 = 40\text{m/s},$ sub unghiul $\alpha = 37^\circ$ față de direcția orizontală $\left(\sin 37^\circ \simeq 0,6\right).$ Se cer:

**a.** să se scrie ecuația traiectoriei săgeții, $y = f(x);$
**b.** să se reprezinte grafic, în EXCEL, traiectoria săgeții.

**94.** **/2/** O piatră este aruncată orizontal cu viteza $v_0 = 10\text{m/s}.$ Știind că distanța orizontală de cădere este egală cu înălțimea de la care a fost lansată piatra, aflați:

**a.** înălțimea de la care a fost lansată piatra;
**b.** durata căderii pietrei;
**c.** viteza cu care piatra atinge solul.

**95.** **/2/** O piatră aruncată orizontal dintr-un turn își mărește viteza de $n = 3$ori într-un timp $\tau = 1,41\text{s}$ de la începutul mișcării. Aflați viteza cu care a fost aruncată piatra.

**96. /2/** Un soldat aruncă o grenadă sub unghiul $\alpha = 30^o$ față de orizontală. Știind că timpul în care arde fitilul grenadei este $\tau = 2\text{s}$, aflați cu ce viteză inițială maximă trebuie aruncată grenada pentru a exploda după atingerea solului.

**97. /2/** O minge de mici dimensiuni este aruncată vertical în jos de la înălțimea $H = 120\text{m}$, cu viteza inițială $v_0 = 10\text{m/s}$. Când viteza mingii devine de trei ori mai mare decât viteza inițială, ea primește un impuls orizontal, căpătând suplimentar viteza orizontală $v = 50\text{m/s}$. Aflați:

**a.** distanța orizontală la care cade mingea, față de verticala punctului de lansare;
**b.** viteza cu care mingea atinge solul.

**98. /3/** Dintr-un punct aflat pe sol se aruncă, în același moment și în același sens, două pietre cu vitezele $v_{01} = 10\text{m/s}$ și respectiv $v_{02} = 20\text{m/s}$ orientate sub unghiul $\alpha = 60^o$ cu orizontala. Se cer:
**a.** înălțimile maxime atinse de pietre,
**b.** distanța dintre punctele în care pietrele ating solul,
**c.** pozițiile (coordonatele) pietrelor în momentul în care modulele vitezelor lor sunt egale,
**d.** distanța dintre pietre în momentul în care modulele vitezelor lor sunt egale.

# PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE ȘI TIPURI DE FORȚE

## PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

**99. /0/** Asupra unui corp cu masa $3\text{kg}$ acționează o forță rezultantă de $12\text{N}$. Aflați accelerația corpului. Cât devine accelerația dacă forța se reduce la jumătate?

**100. /0/** Sub acțiunea unei forțe $F_1 = 10\text{N}$ o cutie se deplasează cu accelerația $a_1 = 2\text{m/s}^2$. Cu ce accelerație se va deplasa cutia sub acțiunea forței $F_2 = 25\text{N}$?

**101. /0/** Un camion gol cu masa $6\text{t}$ pleacă de pe loc cu accelerația $0,4\text{m/s}^2$, sub acțiunea unei forțe de tracțiune, *F*. Ce accelerație va avea camionul la pornire sub acțiunea aceleiași forțe dacă masa încărcăturii este $2\text{t}$?

**102. /0/** Asupra unui vagonet aflat pe o suprafață orizontală acționează o forță constantă după o direcție paralelă cu suprafața, imprimându-i o accelerație $a = 0,2\text{m/s}^2$. Considerând că forțele de frecare sunt neglijabile, aflați:
**a.** accelerația vagonetului dacă forța se triplează;

# SOLUȚII ȘI REZOLVĂRI

**1. /0/** $v = h / \Delta t = 0,2\text{m}/\text{s} = 0,72\text{km}/\text{h}$.

**2. /0/** $d = v_m \cdot \Delta t = 90\text{km}.$

**3. /0/** $d = v_\text{s} \cdot \Delta t = 1,7\text{km}.$

**4. /0/** $\Delta t = d / v_\text{s} = 29,41\text{ms}.$

**5. /0/** $\Delta t = 8,2 \cdot 10^3\text{s} \simeq 2\text{h},17\min$.

**6. /0/** $\Delta t = d / c = 498,66\text{s} = 8,31\min$.

**7. /0/** $t_\text{a} = d / v_\text{a} = 28,23\text{ms};\ t_\text{d} = d / v_\text{d} = 1458,33\text{ms} \simeq 1,46\text{s};$
$\Delta t = t_\text{d} - t_\text{a} \simeq 1430\text{ms} \simeq 1,43\text{s}.$

**8. /1/** $v_\text{m} = \dfrac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = 44\text{m/s} = 158,4\text{km/h}.$

**9. /1/** $v_\text{m} = \dfrac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = 3,75\text{m/s}.$

**10. /1/** $d = Aria\,subgraficului = 104\text{m};\ v_\text{m} = \dfrac{d}{\Delta t} = 10,4\text{m/s}.$

**11. /1/** $d = Aria\,subgraficului = 30\text{m};\ v_\text{m} = \dfrac{d}{\Delta t} = 6\text{m/s}.$

**12. /1/** $v_\text{m} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 72\text{km/h}.$

**13. /1/** $v_\text{m} = \dfrac{3v_1 v_2}{2v_1 + v_2} = 6\text{km/h}.$

**14. /1/** $v_\text{m} = \dfrac{v_1 v_2}{(1 - f)v_1 + f v_2} = 64\text{km/h}.$

**15. /1/** $v_\text{m} = \dfrac{2v_1}{2 - f} = 20\text{m/s}.$

**16. /2/** $v_\text{m} = \dfrac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 4,8\text{m/s}.$

**17. /2/** $v_{\mathrm{m}} = \dfrac{v_1}{2} + \dfrac{v_2 v_3}{v_2 + v_3} \simeq 4{,}92\,\mathrm{m/s}.$

**18. /0/** **a.** $v_{21} = v_2 - v_1 = 25\,\mathrm{km/h},$ în sensul vitezelor mobilelor;

**b.** $v_{12} = \left|v_1 - v_2\right| = 25\,\mathrm{km/h},$ în sens opus vitezelor mobilelor.

**19. /0/** **a.** $v_{21} = v_2 + v_1 = 190\,\mathrm{km/h},$ în sensul vitezei $v_2$;

**b.** $v_{12} = v_1 + v_2 = 190\,\mathrm{km/h},$ în sensul vitezei $v_1$.

**20. /0/** **a.** $v_{\mathrm{CP}} = v_{\mathrm{CT}} + v_{\mathrm{TP}} = 68\,\mathrm{km/h},$ în sensul vitezei trenului;

**b.** $v_{\mathrm{CP}} = -v_{\mathrm{CT}} + v_{\mathrm{TP}} = 62\,\mathrm{km/h},$ în sensul vitezei trenului.

**21. /1/** **a.** $v_{\mathrm{VB}} = v + v_0 = 11\,\mathrm{m/s};$ **b.** $v_{\mathrm{VB}} = v - v_0 = 5\,\mathrm{m/s}.$

**22. /1/** $v_1 = \dfrac{L}{\Delta t} - v_2 = 20\,\mathrm{m/s}.$

**23. /1/** $v_1 = \dfrac{v_{\mathrm{d}1} + v_{\mathrm{d}2}}{2} = 90\,\mathrm{km/h};\ v_1 = \dfrac{v_{\mathrm{d}1} - v_{\mathrm{d}2}}{2} = 50\,\mathrm{km/h}.$

**24. /1/** $v_{\mathrm{A/P}} = \dfrac{d\left(t_2 - t_1\right)}{2t_1t_2} = 15\,\mathrm{km/h};\ v_{\mathrm{B/A}} = \dfrac{d\left(t_1 + t_2\right)}{2t_1t_2} = 35\,\mathrm{km/h}.$

**25. /1/** $t_{\min} = \dfrac{t_1t_2}{t_1 + t_2} = 12\,\mathrm{s}.$

**26. /2/** Notăm $v_r$ – viteza râului, $v_b$ – viteza bărcii față de apă, $T$ – durata totală de deplasare a bărcii, de la eliberarea colacului până la reîntâlnirea acestuia. Distanța parcursă de colac este $D = v_r T,$ distanța parcursă de barcă în sensul curgerii râului este $d_1 = \left(v_b + v_r\right)\tau,$ iar distanța parcursă de barcă în sens opus curgerii râului este $d_2 = \left(v_b - v_r\right)\left(T - \tau\right).$ Din $d_1 = D + d_2$ obținem $T = 2\tau$ și $v_r = \dfrac{D}{2\tau} = 1{,}5\,\mathrm{km/h}.$

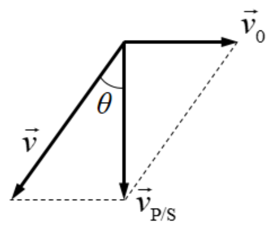
**27. /1/** $v_{\mathrm{E/A}} = \sqrt{2}v_{\mathrm{A}} \simeq 141\,\mathrm{km/h};\ \theta = 135^{\circ}$ (în direcția Sud-Est).

**28. /1/** **a.** $v_{\mathrm{B/M}} = \sqrt{v^2 + v_0^2} = 5\,\mathrm{m/s};$ **b.** $D = \dfrac{Lv_{\mathrm{B/M}}}{v} = 1250\,\mathrm{m}.$

**29. /1/** $v_{\mathrm{A}} = 0,\ v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{D}} = \sqrt{2}v \simeq 28{,}2\,\mathrm{km/h},\ v_{\mathrm{C}} = 2v = 40\,\mathrm{km/h}.$

**30. /2/** Viteza momentană a unui punct de pe roată față de sol se obține prin adunarea vectorială a vitezei punctului respectiv față de bicicletă (viteză tangențială) cu viteza bicicletei. Unghiul dintre aceste două viteze (egale în modul) este $\alpha$ pentru punctele **A** și **D**, respectiv $\beta = 180^{\circ} - \alpha$ pentru punctele **B** și **C**. Din expresia modulului sumei a doi vectori obținem vitezele momentane față de sol, $v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{D}} = 2v\cos\frac{\alpha}{2} \simeq 17,3\,\mathrm{m/s}$ și respectiv $v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{C}} = 2v sin\frac{\alpha}{2} = 10\,\mathrm{m/s}$.

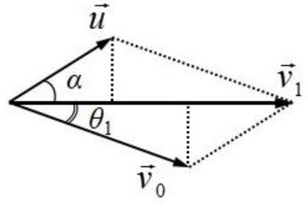
**31.** **/2/** Viteza păsării vață de sol, notată $\vec{v}_{\mathrm{P/S}}$, este suma vectorilor $\vec{v}$ (viteza păsării față de aer) și $\vec{v}_0$ (viteza aerului față de sol), așa cum observăm în figura alăturată. Pasărea va zbura orientată sub unghiul $\theta$ față de direcția meridianului (direcția Nord-Sud).

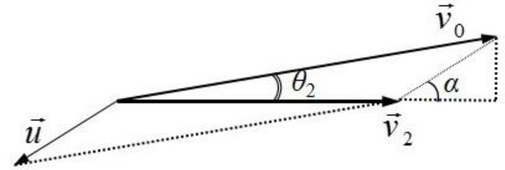



**a.** $v_{\mathrm{P/S}} = \sqrt{v^2 - v_0^2} = 12\,\mathrm{m/s}$; **b.** $\sin\theta = \frac{v_0}{v} \Rightarrow \theta \simeq 25,13^{\circ}$.

**32.** **/2/** Viteza vântului vață de sol, notată $\vec{v}_{\mathrm{V/S}} \equiv \vec{v}_0$, este suma vectorilor $\vec{v}_{\mathrm{V/A}}$ (viteza vântului față de aeroplan) și $\vec{v}_{\mathrm{A/S}} \equiv \vec{v}$ (viteza aeroplanului față de sol). Obținem relația vectorială $\vec{v}_{\mathrm{V/A}} = \vec{v}_0 - \vec{v}$, iar din teorema cosinusului obținem $v_{\mathrm{V/A}} = \sqrt{v^2 + v_0^2 - 2vv_0\cos 135^{\circ}} \simeq 18,5\,\mathrm{m/s}$.

**33.** **/3/** **a.** Din compunerea vitezelor și aplicând teorema sinusului obținem: $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{u\sin\alpha}{v_0}$. Notăm $\theta = \theta_1 = \theta_2$.



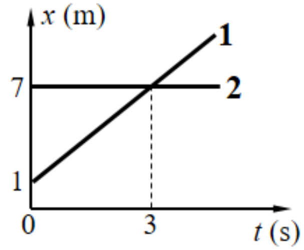

**b.** Durata totală a zborului este $T = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$, unde vitezele sunt: $v_1 = v_{0x} + u_x = v_0\cos\theta + u\cos\alpha$ și $v_2 = v_{0x} - u_x = v_0\cos\theta - u\cos\alpha$. Eliminăm $\cos\theta$ și obținem durata totală a zborului în funcție de unghiul $\alpha$, $T = \frac{2d\sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\alpha}}{v_0^2 - u^2}$. Durata zborului este minimă dacă

$\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90^{\circ} \Rightarrow T_{\min} = \dfrac{2d}{\sqrt{v_0^2 - u^2}}$. Durata zborului este maximă dacă

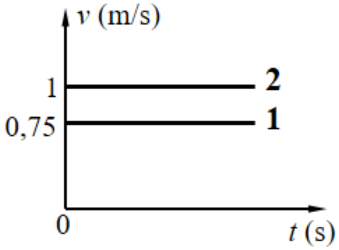
$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow T_{\max} = \dfrac{2dv_0}{v_0^2 - u^2}$.

**34.** **/1/** **a.** $\Delta t = \dfrac{\pi R}{v} = 25\text{s}$; **b.** $|\vec{v}_{\text{m}}| = \dfrac{2R}{\Delta t} = 4\text{m/s}$.

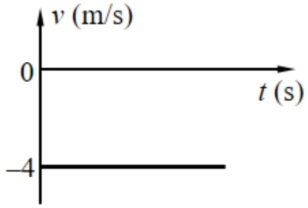
**35.** **/1/** $t_{\text{i}} = 3\text{s}$, $x_{\text{i}} = 7\text{m}$. În figura alăturată sunt reprezentările grafice ale celor două legi de mișcare notate cu **1**: $x_1 = 1 + 2t$ și respectiv **2**: $x_2 = 7$.




**36.** **/1/** $x_1 = 0,75t$; $x_2 = 4 + t$. În figura alăturată sunt reprezentările grafice ale celor două viteze constante notate cu **1**: $v_1 = 0,75\text{m/s}$; și respectiv **2**: $v_2 = 1\text{m/s}$.




**37.** **/1/** $x = 20 - 4t$. În figura alăturată este reprezentarea grafică a vitezei constante a mobilului, $v = -4\text{m/s}$.




**38.** **/1/** **a.** $v_1 = 3\text{m/s}$; $v_2 = 0$; $v_3 = 0,6\text{m/s}$; **b.** $v_{\text{m}} = \dfrac{\Delta X}{\Delta T} = 0,9\,\text{m/s}$.

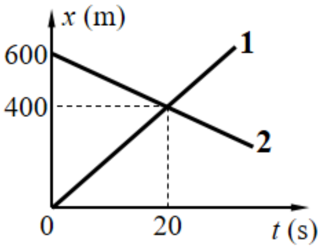
**39.** **/1/** **a.** $v_1 = 7,5\text{m/s}$; $v_2 = 0$; $v_3 = -17,5\text{m/s}$; $v_4 = 25\text{m/s}$;

**b.** $D = \sum_{i=1}^{4} |v_i \Delta t_i| = 200\text{m}$; **c.** $v_{\text{m}} = \dfrac{\Delta X}{\Delta T} = 3,75\text{m/s}$.

**40.** **/1/** **a.** În figura alăturată sunt reprezentările grafice ale celor două legi de mișcare notate cu **1**: $x_1 = 20t$ și respectiv **2**: $x_2 = 600 - 10t$.

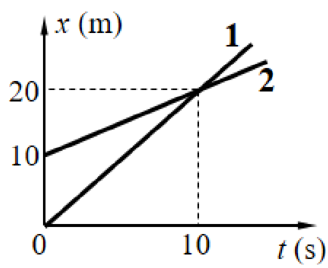
**b.** $t_{\text{i}} = 20\text{s}$, $x_{\text{i}} = 400\text{m}$.

**c.** Coeficientul lui $t$ reprezintă viteza.



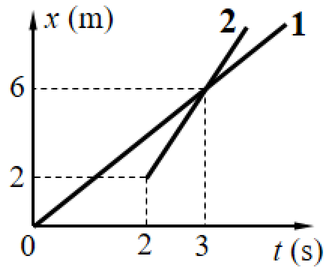
**41. /1/** **a.** În figura alăturată sunt reprezentările grafice ale legilor de mișcare ale celor două mobile notate cu **1**: $x_1 = 2t$ și respectiv **2**: $x_2 = 10 + t$.

**b.** $t_i = 10\text{s}, x_i = 20\text{m}.$




**42. /1/** **a.** În figura alăturată sunt reprezentările grafice ale legilor de mișcare ale celor două mobile notate cu **1**: $x_1 = 2t$ și respectiv **2**: $x_2 = 2 + 4(t-2)$.

**b.** $t_i = 3\text{s}, x_i = 6\text{m}.$




**43. /0/** $t = (v_2 - v_1)/a = 20\text{s}$.

**44. /0/** $a = v/t = 0,2\text{m/s}^2$.

**45. /0/** $a = -v_0/t = -0,5\text{m/s}^2, v_m = v_0/2 = 30m/s, d = v_m \cdot t = 3600\text{m}.$

**46. /0/** $v = at = 104\text{m/s}, d = vt/2 = 208\text{m}.$

**47. /0/** $a = 2d/t^2 = 2\ \text{m/s}^2, v = 2d/t = 20\text{m/s}.$

**48. /0/** $d = (v_2^2 - v_1^2)/2a = 75\text{m}.$

**49. /1/** $d = v^2/2a = 100\text{m}, v' = \sqrt{ad} = 14{,}142\text{m/s}.$

**50. /1/** $a = (v_2^2 - v_1^2)/2d = 1,5\text{m/s}^2, v' = \sqrt{v_1^2 + ad} = 15{,}811\text{m/s}.$

**51. /0/** $v = 2d/t = 20m/s.$

**52. /0/** $t = -v_0/a = 15\text{s}, d = -v_0^2/2a = 112,5\text{m}.$

**53. /0/** $a = -v_0/t = -1\text{m/s}^2, d = v_0 t/2 = 200\text{m}.$

**54. /0/** $v_0 = -at = 15\text{m/s}, d = -at^2/2 = 225\text{m}.$

**55. /0/** $a = -v_0/t,\ d = -v_0^2/2a;\ a_1 = -6\text{m/s}^2, d_1 = 75\text{m};$
$a_2 = -3\text{m/s}^2, d_2 = 150\text{m};\ a_3 = -1\text{m/s}^2, d_3 = 450\text{m}.$

**56. /1/** $d_2 = 4d_1 = 320\text{m}.$

**57. /1/** **a.** $v_2 = v_0 + (v_1 - v_0)t_2/t_1 = 1,6\text{m/s}, d_2 = (v_0 + v_2)t_2/2 = 38,4\text{m};$

**b.** $t_{\text{op.}} = -v_0 t_1 / (v_1 - v_0) = 10\text{s}$, $d_{\text{op.}} = v_0 t_{\text{op.}} / 2 = 40\text{m}$.

**58. /2/** Scriem ecuația mișcării pe prima jumătate de drum parcursă în timpul $t_1$, apoi pe toată distanța parcursă în timpul $t_1 + t_2$. Din cele două ecuații eliminăm viteza inițială și obținem $a = \dfrac{d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 2\text{m/s}^2$.

**59. /1/** $d_1 = \dfrac{a\tau^2}{2} = 0{,}25\text{m}$; $d_2 = 3\dfrac{a\tau^2}{2} = 0{,}75\text{m}$; $d_3 = 5\dfrac{a\tau^2}{2} = 1{,}25\text{m}$.

**60. /1/** $d_1 = v_0\tau + \dfrac{a\tau^2}{2} = 9\text{m}$; $d_2 = v_0\tau + 3\dfrac{a\tau^2}{2} = 7\text{m}$; $d_3 = v_0\tau + 5\dfrac{a\tau^2}{2} = 5\text{m}$.

**61. /1/** $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 2\text{m/s}^2$; $v_{\text{m1}} = v_0 + \dfrac{a\tau}{2} = 11\text{m/s}$;

$v_{\text{m2}} = v_0 + 3\dfrac{a\tau}{2} = 13\text{m/s}$; $v_{\text{m5}} = v_0 + 9\dfrac{a\tau}{2} = 19\text{m/s}$.

**62. /1/** $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = -2\text{m/s}^2$; $v_{\text{m1}} = v_0 + \dfrac{a\tau}{2} = 19\text{m/s}$;

$v_{\text{m2}} = v_0 + 3\dfrac{a\tau}{2} = 17\text{m/s}$; $v_{\text{m10}} = v_0 + 19\dfrac{a\tau}{2} = 1\text{m/s}$.

**63. /1/** $v = \dfrac{2d_1 t}{\tau^2} = 4\text{m/s}$; $d = \dfrac{d_1 t^2}{\tau^2} = 10\text{m}$.

**64. /1/** **a.** $a = \dfrac{d_2 - d_1}{\tau^2} = 1\text{m/s}^2$; **b.** $v_0 = \dfrac{3d_1 - d_2}{2\tau} = 2{,}5\text{m/s}$.

**65. /2/** **a.** Scriem ecuația mișcării pe distanța $d_1$ parcursă în timpul $4\tau$, apoi pe distanța $d_2$ parcursă în timpul $5\tau$, și înlocuim distanțele în ecuația $d = d_2 - d_1$. Obținem $a = \dfrac{2(d - v_0\tau)}{9\tau^2} = -4\text{m/s}^2$;

**b.** $t_{\text{op}} = -\dfrac{v_0}{a} = 5{,}5\text{s}$;

**c.** $d_{\text{op}} = -\dfrac{v_0^2}{2a} = 60{,}5\text{m}$.

**66. /2/** Se scrie ecuația mișcării pe distanța $D$, și pe distanța $D - fD$. Din cele două ecuații obținem $T = \dfrac{\tau\left(1 \pm \sqrt{1-f}\right)}{f}$. Durata întregii mișcări nu poate fi mai mică decât $\tau = 1\text{s}$, rezultă că soluția care convine este $T = \dfrac{\tau\left(1+\sqrt{1-f}\right)}{f} = 10\text{s}.$

**67. /0/** **a.** $v = 10\text{m/s}$; **b.** $v_{\text{m}} = 20\text{m/s}$.

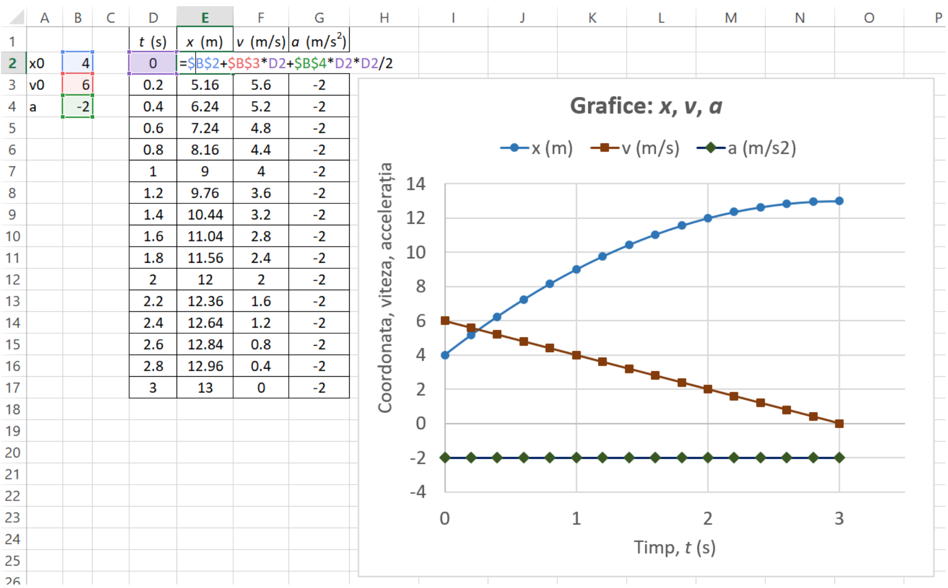
**68. /0/** **a.** $x = 50\text{m}$; **b.** $v_{\text{m}} = 8\text{m/s}$.

**69. /1/** **a.** $t = 3\text{s}$; **b.** $\Delta x_{2-3} = x_3 - x_2 = 4\text{m}$; c. $v_{\text{m}} = \dfrac{x_3 - x_0}{t_3} = 6\text{m/s}$.

**70. /1/** **/EXCEL/** **a.** $v = 6 - 2t,\ a = -2\text{m/s}^2$, mișcare rectilinie uniform decelerată;

**b.** $v_0 = 6\text{m/s},\ v_1 = 4\text{m/s},\ v_2 = 2\text{m/s},\ v_3 = 0$.

**c.** Graficele sunt reprezentate, în același sistem de axe de coordonate, în imaginea următoare.



| | A | B | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | t (s) | x (m) | v (m/s) | a (m/s²) |
| 2 | x0 | 4 | 0 | =\$B\$2+\$B\$3*D2+\$B\$4*D2*D2/2 | | |
| 3 | v0 | 6 | 0.2 | 5.16 | 5.6 | -2 |
| 4 | a | -2 | 0.4 | 6.24 | 5.2 | -2 |
| 5 | | | 0.6 | 7.24 | 4.8 | -2 |
| 6 | | | 0.8 | 8.16 | 4.4 | -2 |
| 7 | | | 1 | 9 | 4 | -2 |
| 8 | | | 1.2 | 9.76 | 3.6 | -2 |
| 9 | | | 1.4 | 10.44 | 3.2 | -2 |
| 10 | | | 1.6 | 11.04 | 2.8 | -2 |
| 11 | | | 1.8 | 11.56 | 2.4 | -2 |
| 12 | | | 2 | 12 | 2 | -2 |
| 13 | | | 2.2 | 12.36 | 1.6 | -2 |
| 14 | | | 2.4 | 12.64 | 1.2 | -2 |
| 15 | | | 2.6 | 12.84 | 0.8 | -2 |
| 16 | | | 2.8 | 12.96 | 0.4 | -2 |
| 17 | | | 3 | 13 | 0 | -2 |

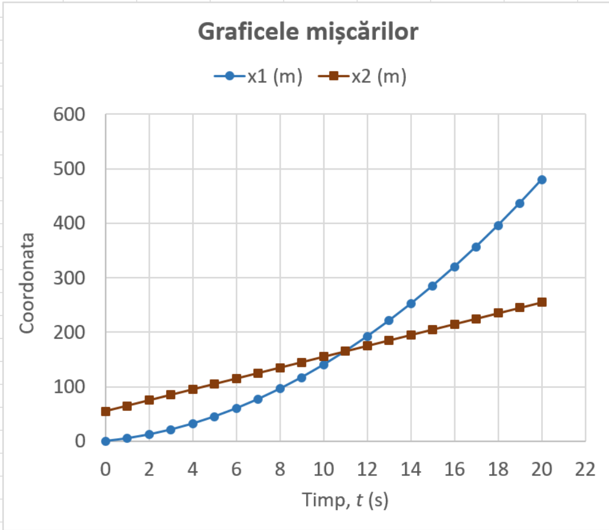


Observăm că graficul coordonatei este o porțiune de parabolă care admite un maxim, graficul vitezei este o dreaptă cu panta negativă, iar graficul accelerației este o dreaptă paralelă cu axa timpului deoarece accelerația mobilului este constantă.

**71. /1/** **/EXCEL/** **a.** $t_{\text{i}} = 11\text{s}$; **b.** $x_{\text{i}} = 165\text{m}$;

**c.** Ecuațiile mișcărilor sunt: $x_1 = 4t + t^2$ și $x_2 = 55 + 10t$. Cele două grafice se intersectează în punctul corespunzător întâlnirii mobilelor: $t_{\text{i}} = 11\text{s},\ x_{\text{i}} = 165\text{m}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | *t* (s) | *x1* (m) | *x2* (m) |
| 2 | | | | 0 | =$B$3*D2+$B$4*D2*D2/2 | |
| 3 | v01 | 4 | | 1 | 5 | 65 |
| 4 | a1 | 2 | | 2 | 12 | 75 |
| 5 | | | | 3 | 21 | 85 |
| 6 | | | | 4 | 32 | 95 |
| 7 | d | 55 | | 5 | 45 | 105 |
| 8 | vB | 10 | | 6 | 60 | 115 |
| 9 | | | | 7 | 77 | 125 |
| 10 | | | | 8 | 96 | 135 |
| 11 | | | | 9 | 117 | 145 |
| 12 | | | | 10 | 140 | 155 |
| 13 | | | | 11 | 165 | 165 |
| 14 | | | | 12 | 192 | 175 |
| 15 | | | | 13 | 221 | 185 |
| 16 | | | | 14 | 252 | 195 |
| 17 | | | | 15 | 285 | 205 |
| 18 | | | | 16 | 320 | 215 |
| 19 | | | | 17 | 357 | 225 |
| 20 | | | | 18 | 396 | 235 |
| 21 | | | | 19 | 437 | 245 |
| 22 | | | | 20 | 480 | 255 |
| 23 | | | | | | |
| 24 | | | | | | |
| 25 | | | | | | |
| 26 | | | | | | |

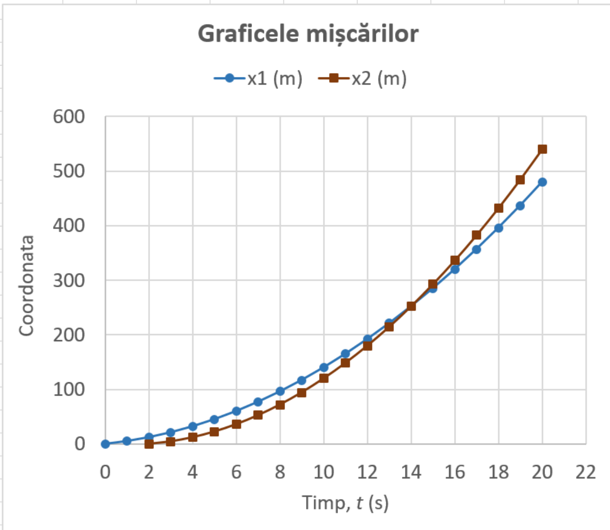



**72. /1/ /EXCEL/ a.** $t_i = 14\text{s},\ x_i = 252\text{m}$;

**b.** $v_{m1} = 18\text{m/s},\ v_{m2} = 21\text{m/s}$;

**c.** Ecuațiile mișcărilor sunt: $x_1 = 4t + t^2$ și $x_2 = 3(t-2) + 1{,}5(t-2)^2$. Cele două grafice sunt parabole care se intersectează în punctul corespunzător întâlnirii mobilelor: $t_i = 14\text{s},\ x_i = 252\text{m}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | *t* (s) | *x1* (m) | *x2* (m) |
| 2 | x01 | 0 | | 0 | =$B$2+$B$3*D2+$B$4*D2*D2/2 | |
| 3 | v01 | 4 | | 1 | 5 | |
| 4 | a1 | 2 | | 2 | 12 | 0 |
| 5 | | | | 3 | 21 | 4.5 |
| 6 | | | | 4 | 32 | 12 |
| 7 | x02 | 0 | | 5 | 45 | 22.5 |
| 8 | v02 | 3 | | 6 | 60 | 36 |
| 9 | a2 | 3 | | 7 | 77 | 52.5 |
| 10 | tau | 2 | | 8 | 96 | 72 |
| 11 | | | | 9 | 117 | 94.5 |
| 12 | | | | 10 | 140 | 120 |
| 13 | | | | 11 | 165 | 148.5 |
| 14 | | | | 12 | 192 | 180 |
| 15 | | | | 13 | 221 | 214.5 |
| 16 | | | | 14 | 252 | 252 |
| 17 | | | | 15 | 285 | 292.5 |
| 18 | | | | 16 | 320 | 336 |
| 19 | | | | 17 | 357 | 382.5 |
| 20 | | | | 18 | 396 | 432 |
| 21 | | | | 19 | 437 | 484.5 |
| 22 | | | | 20 | 480 | 540 |
| 23 | | | | | | |
| 24 | | | | | | |
| 25 | | | | | | |
| 26 | | | | | | |

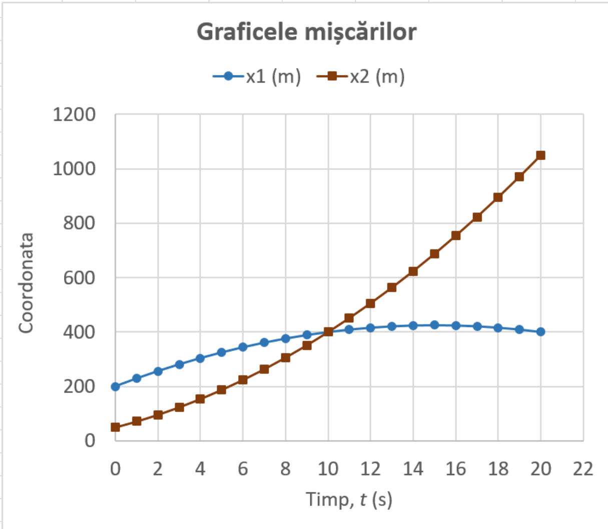


**73. /1/** **/EXCEL/** **a.** $t_i = 10\text{s},\ x_i = 400\text{m};$

**b.** $v_{21} = v_2 - v_1 = 40\text{m/s};$

**c.** Cele două grafice sunt parabole care se intersectează în punctul corespunzător întâlnirii mobilelor: $t_i = 10\text{s},\ x_i = 400\text{m}.$

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | t (s) | x1 (m) | x2 (m) |
| 2 | x01 | 200 | | 0 | =$B$2+$B$3*D2+$B$4*D2*D2/2 | |
| 3 | v01 | 30 | | 1 | 229 | 71.5 |
| 4 | a1 | -2 | | 2 | 256 | 96 |
| 5 | | | | 3 | 281 | 123.5 |
| 6 | | | | 4 | 304 | 154 |
| 7 | x02 | 50 | | 5 | 325 | 187.5 |
| 8 | v02 | 20 | | 6 | 344 | 224 |
| 9 | a2 | 3 | | 7 | 361 | 263.5 |
| 10 | | | | 8 | 376 | 306 |
| 11 | | | | 9 | 389 | 351.5 |
| 12 | | | | 10 | 400 | 400 |
| 13 | | | | 11 | 409 | 451.5 |
| 14 | | | | 12 | 416 | 506 |
| 15 | | | | 13 | 421 | 563.5 |
| 16 | | | | 14 | 424 | 624 |
| 17 | | | | 15 | 425 | 687.5 |
| 18 | | | | 16 | 424 | 754 |
| 19 | | | | 17 | 421 | 823.5 |
| 20 | | | | 18 | 416 | 896 |
| 21 | | | | 19 | 409 | 971.5 |
| 22 | | | | 20 | 400 | 1050 |




**74. /2/** **a.** $v = 54\text{cm/s};$ **b.** Din definiția accelerației momentane, $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ pentru $\Delta t \to 0$, obținem $a = \dfrac{b\left(t_2^2 - t_1^2\right)}{t_2 - t_1} = b\left(t_1 + t_2\right).$ Dar $t_2 - t_1 \simeq 0 \Rightarrow t_1 \simeq t_2$ și notând $t = t_1 \simeq t_2$, obținem $a = 2bt = 20\text{cm/s}^2;$

**c.** Deoarece dependența accelerației de timp este liniară, accelerația medie este egală cu media aritmetică a accelerațiilor la momentele $t_0 = 0$ și $t = 5\text{s}$. Obținem $a_m = bt = 10\text{cm/s}^2$.

**75. /0/** $v_s = \sqrt{2gh} = 20\text{m/s},\ t_c = \dfrac{v}{g} = 2\text{s}.$

**76. /0/** $v_s = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 25\text{m/s},\ t_c = \dfrac{v - v_0}{g} = 1\text{s}.$

**77. /0/** $h = \dfrac{gt_c^2}{2} = 80\text{m},\ v = gt_c = 40\text{m/s}.$

**78. /0/** $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g} = 45\text{m},\ t_u = \dfrac{v_0}{g} = 3\text{s}.$

**79. /0/** $v_0 = \sqrt{v^2 + 2gh} = 15\text{m/s}.$

**80. /1/** **a.** $t_u = \dfrac{v_0}{g} = 2\text{s},\ h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g} = 20\text{m};$

**b.** $t_u = t_c \Rightarrow T = t_u + t_c = \dfrac{2v_0}{g} = 4\text{s};$

**c.** $v_s = v_0 = 20\text{m/s};$

**d.** $t_1 = \dfrac{v_0 - v_1}{g} = 1\text{s},\ t_2 = \dfrac{v_0 + v_1}{g} = 3\text{s}.$

**81. /1/** $T = t_u + t_c = 2\sqrt{\dfrac{2H}{g}} = 6\text{s};\ H' = n^2 H = 180\text{m}.$

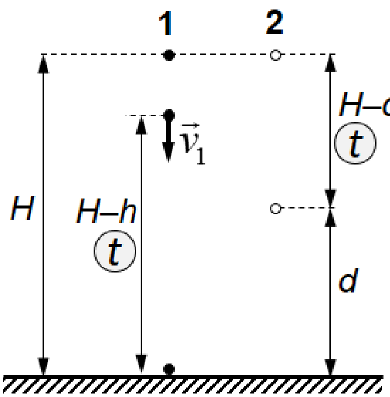
**82. /1/** $T = t_1 + t_2 = \dfrac{H+h}{\sqrt{2gh}} = 4{,}5\text{s}.$

**83. /1/** **a.** $v_s = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 50\text{m/s};$

**b.** $T = \dfrac{v + v_0}{g} = 6\text{s}.$

**84. /2/** **a.** Scriem ecuația mișcării pe toată înălțimea *H*, în timpul total de cădere *T*, apoi pe distanța $H - fH$, în timpul $T - \tau$. Din cele două ecuații se obține $T = \dfrac{\tau\left(1 \pm \sqrt{1-f}\right)}{f}$, iar soluția care are sens fizic $\left(T > \tau\right)$ este $T = \dfrac{\tau\left(1 + \sqrt{1-f}\right)}{f} = 20\text{s}.$

**b.** $H = \dfrac{gT^2}{2} = 2\text{km}.$




**85. /2/** Scriem ecuațiile mișcărilor: $H - h = v_1 t + \dfrac{at^2}{2}$ (1) și $H - d = \dfrac{at^2}{2}$ (2). Din $(1) - (2) \Rightarrow d - h = v_1 t$, în care înlocuim $v_1 = \sqrt{2ah}$ și obținem

$t=\dfrac{d-h}{\sqrt{2ah}}$ (3). Eliminăm timpul din relațiile (2) și (3) și rezolvăm ecuația $d^2+2hd+h^2-4hH=0$, care are soluția pozitivă $d=2\sqrt{hH}-h=95\text{m}$.

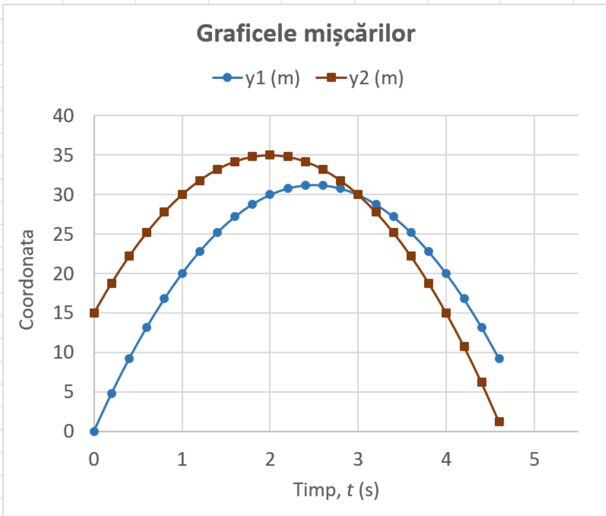
**86.** /2/ **/EXCEL/** **a.** Alegem axa mișcării *Oy* cu originea la nivelul solului și orientată în sensul vitezelor inițiale. Ecuațiile mișcărilor celor două corpuri sunt: $y_1=v_{01}t-\dfrac{gt^2}{2}$ (1) și $y_2=h+v_{02}t-\dfrac{gt^2}{2}$ (2). Din condiția de întâlnire, $y_1=y_2$, obținem momentul de timp la care se întâlnesc corpurile, $t_{\text{i}}=\dfrac{h}{v_{01}-v_{02}}=3s$ (3).

**b.** Înlocuim (3) în (1) și obținem coordonata punctului de întâlnire, $y_{\text{i}}=30\text{m}$.

**c.** $v_1=v_{01}-gt_{\text{i}}=-5\text{m/s}$, $v_2=v_{02}-gt_{\text{i}}=-10\text{m/s}$. Semnificația vitezelor negative este aceea că în momentul întâlnirii ambele corpuri se află în cădere, iar vitezele sunt în sens opus axei *Oy*.

**d.** Se reprezintă grafic ecuațiile mișcărilor (1) și (2). Cele două grafice sunt parabole care se intersectează în punctul corespunzător întâlnirii corpurilor: $t_{\text{i}}=3\text{s}$, $y_{\text{i}}=30\text{m}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | t (s) | y1 (m) | y2 (m) |
| 2 | | | | 0 | 0 | =$B$6+$B$7*D2-$B$3*D2^2/2 |
| 3 | g | 10 | | 0.2 | 4.8 | 18.8 |
| 4 | v01 | 25 | | 0.4 | 9.2 | 22.2 |
| 5 | | | | 0.6 | 13.2 | 25.2 |
| 6 | h | 15 | | 0.8 | 16.8 | 27.8 |
| 7 | v02 | 20 | | 1 | 20 | 30 |
| 8 | | | | 1.2 | 22.8 | 31.8 |
| 9 | | | | 1.4 | 25.2 | 33.2 |
| 10 | | | | 1.6 | 27.2 | 34.2 |
| 11 | | | | 1.8 | 28.8 | 34.8 |
| 12 | | | | 2 | 30 | 35 |
| 13 | | | | 2.2 | 30.8 | 34.8 |
| 14 | | | | 2.4 | 31.2 | 34.2 |
| 15 | | | | 2.6 | 31.2 | 33.2 |
| 16 | | | | 2.8 | 30.8 | 31.8 |
| 17 | | | | 3 | 30 | 30 |
| 18 | | | | 3.2 | 28.8 | 27.8 |
| 19 | | | | 3.4 | 27.2 | 25.2 |
| 20 | | | | 3.6 | 25.2 | 22.2 |
| 21 | | | | 3.8 | 22.8 | 18.8 |
| 22 | | | | 4 | 20 | 15 |
| 23 | | | | 4.2 | 16.8 | 10.8 |
| 24 | | | | 4.4 | 13.2 | 6.2 |
| 25 | | | | 4.6 | 9.2 | 1.2 |
| 26 | | | | | | |




**87.** /2/ **/EXCEL/** **a.** Alegem axa mișcării *Oy* cu originea la nivelul solului și orientată în sensul vitezei inițiale a celui de-al doilea corp (în sus). Ecuațiile mișcărilor celor două corpuri sunt: $y_1=h-v_{01}t-\dfrac{gt^2}{2}$ (1) și

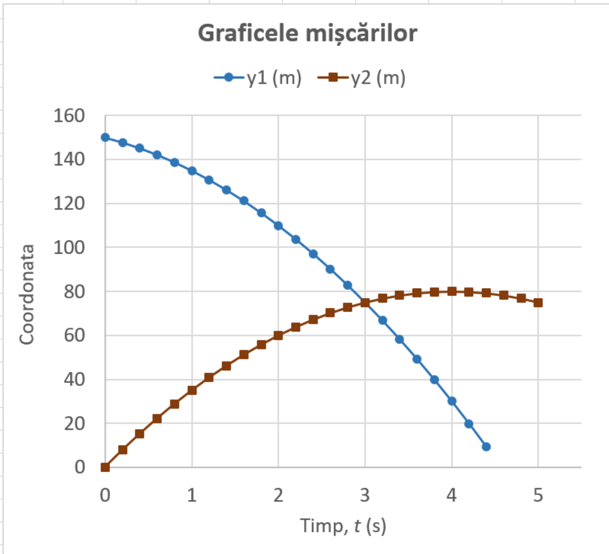
$y_2 = v_{02}t - \dfrac{gt^2}{2}$ (2). Din condiția de întâlnire, $y_1 = y_2$, obținem momentul de timp la care se întâlnesc corpurile, $t_i = \dfrac{h}{v_{02} - v_{01}} = 3s$ (3).

**b.** Înlocuim (3) în (1) și obținem coordonata punctului de întâlnire, $y_i = 75\text{m}$.

**c.** $v_1 = -v_{01} - gt_i = -40\text{m/s}$, $v_2 = v_{02} - gt_i = 10\text{m/s}$. În momentul întâlnirii primul corp se află în cădere, având viteza sunt în sens opus axei *Oy*, iar cel de-al doilea este în urcare, având viteza în sensul axei *Oy*.

**d.** Se reprezintă grafic ecuațiile mișcărilor (1) și (2). Cele două grafice sunt parabole care se intersectează în punctul corespunzător întâlnirii corpurilor: $t_i = 3\text{s}$, $y_i = 75\text{m}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | t (s) | y1 (m) | y2 (m) |
| 2 | g | 10 | | 0 | `=$B$3-$B$4*D2-$B$2*D2^2/2` | |
| 3 | h | 150 | | 0.2 | 147.8 | 7.8 |
| 4 | v01 | 10 | | 0.4 | 145.2 | 15.2 |
| 5 | | | | 0.6 | 142.2 | 22.2 |
| 6 | v02 | 40 | | 0.8 | 138.8 | 28.8 |
| 7 | | | | 1 | 135 | 35 |
| 8 | | | | 1.2 | 130.8 | 40.8 |
| 9 | | | | 1.4 | 126.2 | 46.2 |
| 10 | | | | 1.6 | 121.2 | 51.2 |
| 11 | | | | 1.8 | 115.8 | 55.8 |
| 12 | | | | 2 | 110 | 60 |
| 13 | | | | 2.2 | 103.8 | 63.8 |
| 14 | | | | 2.4 | 97.2 | 67.2 |
| 15 | | | | 2.6 | 90.2 | 70.2 |
| 16 | | | | 2.8 | 82.8 | 72.8 |
| 17 | | | | 3 | 75 | 75 |
| 18 | | | | 3.2 | 66.8 | 76.8 |
| 19 | | | | 3.4 | 58.2 | 78.2 |
| 20 | | | | 3.6 | 49.2 | 79.2 |
| 21 | | | | 3.8 | 39.8 | 79.8 |
| 22 | | | | 4 | 30 | 80 |
| 23 | | | | 4.2 | 19.8 | 79.8 |
| 24 | | | | 4.4 | 9.2 | 79.2 |
| 25 | | | | 4.6 | | 78.2 |
| 26 | | | | 4.8 | | 76.8 |
| 27 | | | | 5 | | 75 |



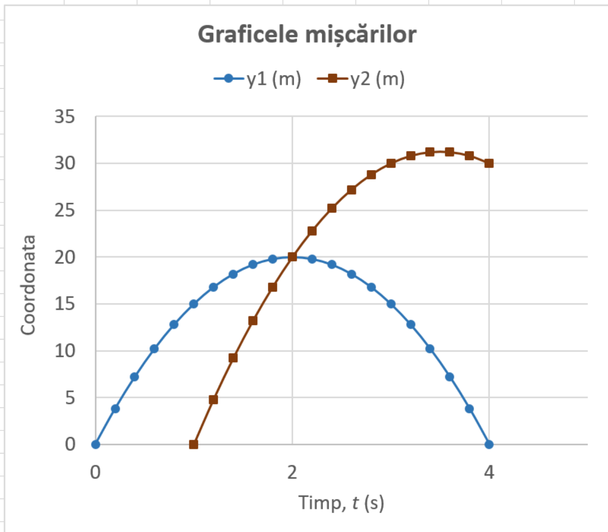

**88.** /2/ /EXCEL/ **a.** Alegem axa mișcării *Oy* cu originea la nivelul solului și orientată în sensul vitezelor inițiale. Ecuațiile mișcărilor celor două corpuri sunt: $y_1 = v_{01}t - \dfrac{gt^2}{2}$ (1) și $y_2 = v_{02}\left(t-\tau\right) - \dfrac{g\left(t-\tau\right)^2}{2}$ (2). Din condiția de întâlnire, $y_1 = y_2$, obținem momentul de timp la care se întâlnesc corpurile, măsurat din momentul lansării primului corp, $t_i = \dfrac{\left(v_{02} + g\tau/2\right)\tau}{v_{02} - v_{01} + g\tau} = 2s$ (3).

**b.** Înlocuim (3) în (1) și obținem coordonata punctului de întâlnire, $y_i = 20\text{m}$.

**c.** $v_1 = v_{01} - gt_i = 0$, $v_2 = v_{02} - g(t_i - \tau) = 15\text{m/s}$. Corpurile se întâlnesc în momentul în care primul corp se află la înălțimea maximă, având viteza nulă, iar al doilea corp se află în urcare.

**d.** Se reprezintă grafic ecuațiile mișcărilor (1) și (2). Cele două grafice sunt parabole care se intersectează în punctul corespunzător întâlnirii corpurilor: $t_i = 2\text{s}$, $y_i = 20\text{m}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | t (s) | y1 (m) | y2 (m) |
| 2 | | | | 0 | =$B$4*D2-$B$3*D2^2/2 | |
| 3 | g | 10 | | 0.2 | 3.8 | |
| 4 | v01 | 20 | | 0.4 | 7.2 | |
| 5 | v02 | 25 | | 0.6 | 10.2 | |
| 6 | tau | 1 | | 0.8 | 12.8 | |
| 7 | | | | 1 | 15 | 0 |
| 8 | | | | 1.2 | 16.8 | 4.8 |
| 9 | | | | 1.4 | 18.2 | 9.2 |
| 10 | | | | 1.6 | 19.2 | 13.2 |
| 11 | | | | 1.8 | 19.8 | 16.8 |
| 12 | | | | 2 | 20 | 20 |
| 13 | | | | 2.2 | 19.8 | 22.8 |
| 14 | | | | 2.4 | 19.2 | 25.2 |
| 15 | | | | 2.6 | 18.2 | 27.2 |
| 16 | | | | 2.8 | 16.8 | 28.8 |
| 17 | | | | 3 | 15 | 30 |
| 18 | | | | 3.2 | 12.8 | 30.8 |
| 19 | | | | 3.4 | 10.2 | 31.2 |
| 20 | | | | 3.6 | 7.2 | 31.2 |
| 21 | | | | 3.8 | 3.8 | 30.8 |
| 22 | | | | 4 | 0 | 30 |




**89. /3/** **a.** Durata totală a mișcării bilei este $T = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + \ldots + 2t_n$, unde $t_0 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ este durata primei căderi, iar $t_1, t_2, \ldots, t_n$ reprezintă timpii de urcare după fiecare ciocnire cu suprafața orizontală ($n \to \infty$ este numărul de ciocniri). Dacă notăm cu $v_0 = \sqrt{2gH}$ – viteza bilei imediat înainte de prima ciocnire și cu $v_1$ – viteza bilei imediat după prima ciocnire, unde $v_1 = fv_0$, din legea vitezei la prima urcare obținem $t_1 = \dfrac{v_1}{g} = \dfrac{fv_0}{g}$. La a doua ciocnire $v_2 = fv_1 = f^2v_0$ și $t_2 = \dfrac{v_2}{g} = \dfrac{f^2v_0}{g}$. Analog, după a $n$-a ciocnire găsim $t_n = \dfrac{v_n}{g} = \dfrac{f^nv_0}{g}$. Durata totală a mișcării bilei este

$$T = t_0 + 2\frac{fv_0}{g} + 2\frac{f^2v_0}{g} + ... + 2\frac{f^n v_0}{g} \Rightarrow \quad T = t_0 + 2\frac{fv_0}{g}\left(1 + f + ... + f^{n-1}\right).$$

Folosim suma termenilor progresiei geometrice și obținem $T = t_0 + 2\frac{fv_0}{g}\frac{f^n - 1}{f - 1}$. Pentru un număr foarte mare de ciocniri, $n \to \infty \Rightarrow f^n \to 0 \Rightarrow T = t_0 + \frac{2f}{1-f}\frac{v_0}{g}$. Înlocuim $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ și $v_0 = \sqrt{2gH}$ și găsim $T = \frac{1+f}{1-f}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 18\text{s}$.

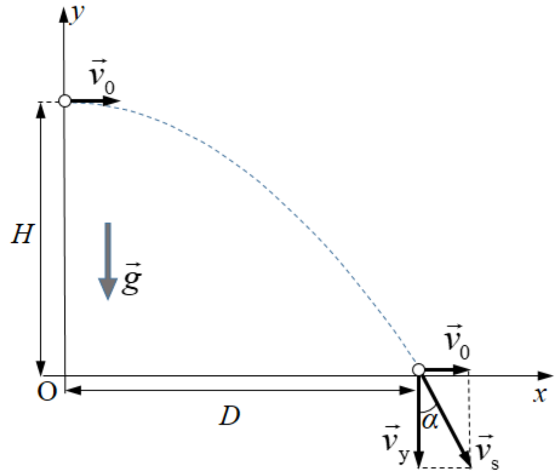
**b.** Distanța totală parcursă de bilă este $D = H + 2h_1 + 2h_2 + ... + 2h_\text{n}$, unde $h_1, h_2, ..., h_\text{n}$ reprezintă înălțimile maxime atinse după fiecare ciocnire cu suprafața orizontală. Din ecuația lui Galilei la prima urcare obținem $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{f^2v_0^2}{2g}$. La a doua ciocnire $v_2 = fv_1 = f^2v_0$ și $h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{f^4v_0^2}{2g}$.

Analog, după a $n-$a ciocnire găsim $h_\text{n} = \frac{v_\text{n}^2}{2g} = \frac{f^{2n}v_0^2}{2g}$. Distanța totală parcursă de bilă este $D = H + 2\frac{f^2v_0^2}{2g} + 2\frac{f^4v_0^2}{2g} + ... + 2\frac{f^{2n}v_0^2}{2g} \Rightarrow$

$D = H + \frac{f^2v_0^2}{g}\left(1 + f^2 + ... f^{2n-2}\right)$. Folosim suma termenilor progresiei geometrice și obținem $D = H + \frac{f^2v_0^2}{g}\frac{f^{2n} - 1}{f^2 - 1}$. Pentru un număr foarte mare de ciocniri, $n \to \infty \Rightarrow f^{2n} \to 0 \Rightarrow D = H + \frac{f^2}{1 - f^2}\frac{v_0^2}{g}$. Înlocuim $v_0 = \sqrt{2gH}$ și găsim $D = \frac{1 + f^2}{1 - f^2}H \simeq 91{,}11\text{m}$.

**90. /2/** **a.** Descompunem mișcarea pe două direcții, așa cum observăm în figura alăturată: pe axa *Ox* mișcarea este rectilinie uniformă, iar pe axa *Oy* mișcarea este uniform accelerată cu $v_{0\text{y}} = 0$ (cădere liberă). Din legea spațiului pe axa *Oy*, $H = \frac{gt_\text{c}^2}{2} \Rightarrow \quad t_\text{c} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 4\text{s}$.

**b.** Din legea spațiului pe axa *Ox* obținem $D = v_0 t_\text{c} = 120\text{m}$.




**c.** Din legea vitezei pe axa *Oy* obținem $v_y = gt_c = 40\text{m/s},$ iar viteza săgeții la sol este $v_s = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = 50\text{m/s}.$

**d.** $\text{tg}\alpha = \dfrac{v_0}{v_y} = 0,75 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(0,75) \simeq 36,87^\circ.$

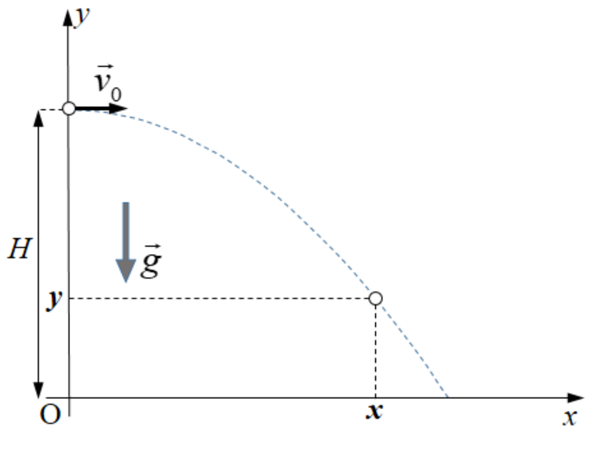
**91.** /2/ **/EXCEL/** **a.** Descompunem mișcarea pe două direcții, așa cum observăm în figura alăturată: pe axa *Ox* mișcarea este rectilinie uniformă, iar pe axa *Oy* mișcarea este uniform accelerată cu $v_{0y} = 0$ (cădere liberă).

Scriem ecuațiile de mișcare pe cele două axe, la un moment oarecare, *t*: $x = v_0 t$ (1)

și $y = H - \dfrac{gt^2}{2}$ (2).

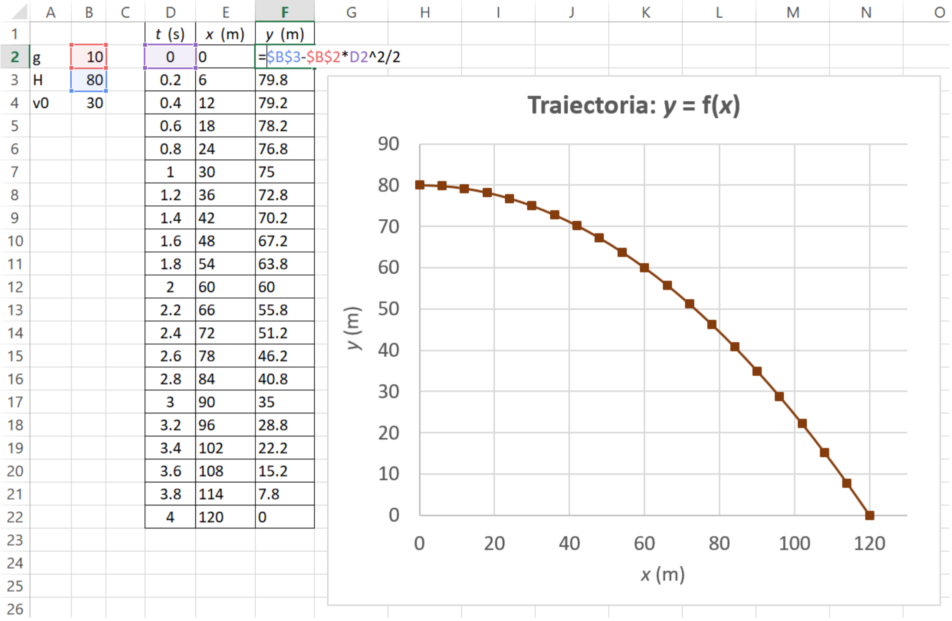
Înlocuim *t* din relația (1) în relația (2) și obținem ecuația traiectoriei,

$y = H - \dfrac{g}{2v_0^2}x^2$ (3),




care este o funcție de gradul II.

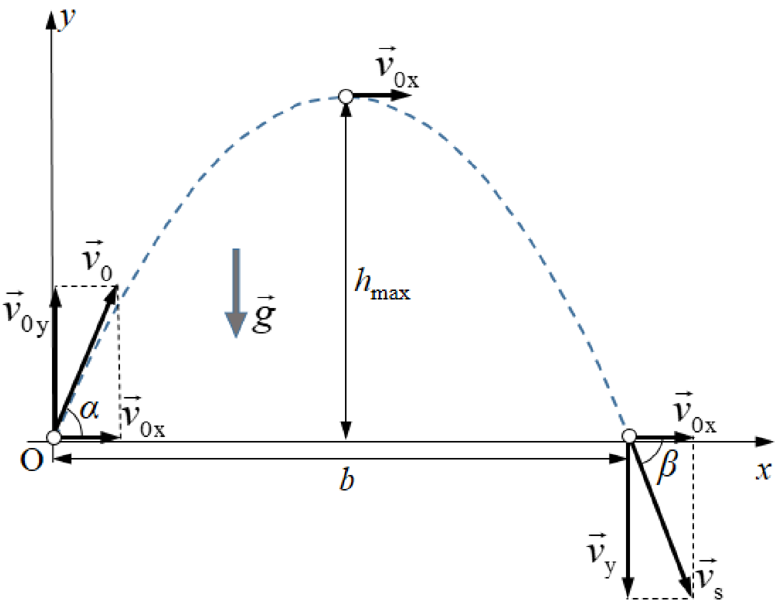
**b.** Se calculează coordonatele *x* și *y* cu relațiile (1) și (2), apoi se reprezintă grafic *y* în funcție de *x*. Se observă că traiectoria este o parte dintr-o parabolă care admite un maxim care reprezintă chiar punctul de lansare.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | t (s) | x (m) | y (m) |
| 2 | g | 10 | | 0 | 0 | =$B$3-$B$2*D2^2/2 |
| 3 | H | 80 | | 0.2 | 6 | 79.8 |
| 4 | v0 | 30 | | 0.4 | 12 | 79.2 |
| 5 | | | | 0.6 | 18 | 78.2 |
| 6 | | | | 0.8 | 24 | 76.8 |
| 7 | | | | 1 | 30 | 75 |
| 8 | | | | 1.2 | 36 | 72.8 |
| 9 | | | | 1.4 | 42 | 70.2 |
| 10 | | | | 1.6 | 48 | 67.2 |
| 11 | | | | 1.8 | 54 | 63.8 |
| 12 | | | | 2 | 60 | 60 |
| 13 | | | | 2.2 | 66 | 55.8 |
| 14 | | | | 2.4 | 72 | 51.2 |
| 15 | | | | 2.6 | 78 | 46.2 |
| 16 | | | | 2.8 | 84 | 40.8 |
| 17 | | | | 3 | 90 | 35 |
| 18 | | | | 3.2 | 96 | 28.8 |
| 19 | | | | 3.4 | 102 | 22.2 |
| 20 | | | | 3.6 | 108 | 15.2 |
| 21 | | | | 3.8 | 114 | 7.8 |
| 22 | | | | 4 | 120 | 0 |



**92.** /2/ **a.** Descompunem mişcarea pe două direcţii, aşa cum observăm în figura alăturată: pe axa *Ox* mişcarea este rectilinie uniformă cu viteza constantă $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, iar pe axa *Oy* mişcarea este uniform variată cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ (urcare până la înălţimea maximă, urmată de cădere liberă).



Din legea vitezei pe axa *Oy*, la urcarea până la înălțimea maximă, $0 = v_{0y} - gt_u \Rightarrow \quad t_u = \frac{v_{0y}}{g}$. Dar timpul de urcare este egal cu cel de coborâre, deci durata totală a mișcării proiectilului este $t = t_u + t_c = 2t_u \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 4,8\text{s}$.

**b.** Din legea spațiului pe axa *Ox* obținem $b = v_{0x}t \Rightarrow$ $b = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 153,6\text{m}$.

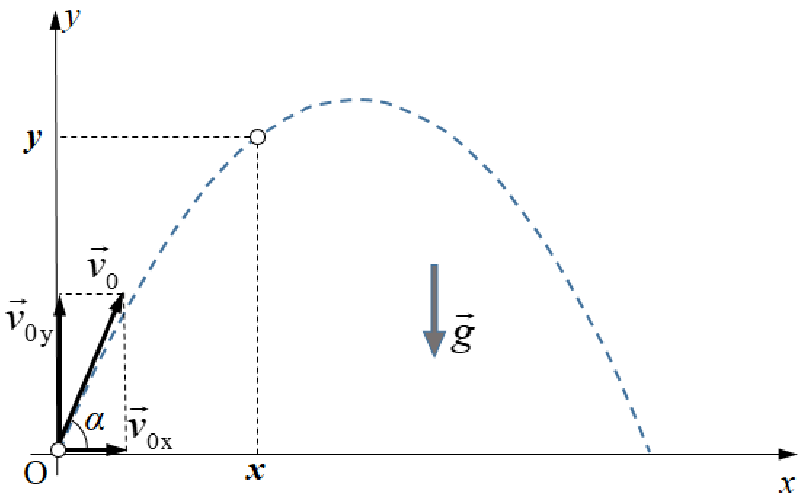
**c.** Din ecuația lui Galilei pe axa *Oy*, la urcare, $0 = v_{0y}^2 - 2gh_{max} \Rightarrow$ $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 28,8\text{m}$.

**d.** În cazul aruncării unui corp pe verticală în sus, de la sol, viteza cu care corpul cade pe sol este egală cu viteza de lansare, $v_y = v_{0y} \Rightarrow$ $v_s = v_0 = 40\text{m/s}$.

**e.** $\text{tg}\beta = \frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \quad \beta = \alpha = 37^\circ$.

**f.** Bătaia poate fi scrisă în forma $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ și este maximă dacă $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \quad 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$.

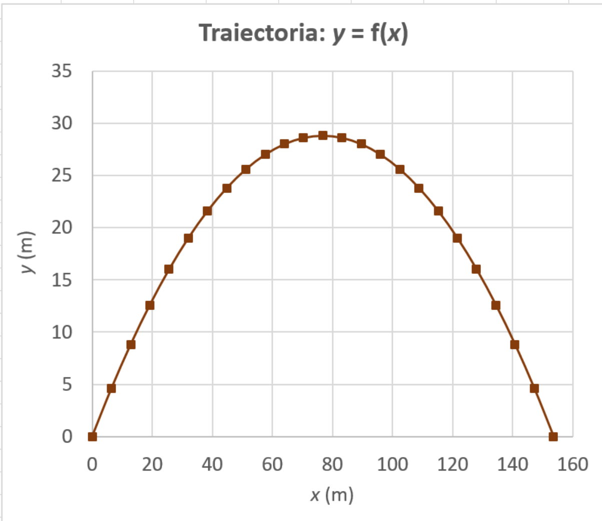
**93. /2/ /EXCEL/ a.** Descompunem mișcarea pe două direcții, așa cum observăm în figura alăturată.



Pe axa *Ox* mișcarea este rectilinie uniformă, cu viteza constantă $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, iar pe axa *Oy* mișcarea este uniform variată cu $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ și cu accelerația $a = -g$. Scriem ecuațiile de mișcare pe cele două axe, la un moment oarecare, *t*: $x = v_{0x}t$ (1) și $y = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2}$ (2). Înlocuim *t* din relația (1) în relația (2) și obținem ecuația traiectoriei $y = (\mathrm{tg}\alpha)x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$ (3), care este o funcție de gradul II.

**b.** Se calculează coordonatele *x* și *y* cu relațiile (1) și (2), apoi se reprezintă grafic *y* în funcție de *x*. Se observă că traiectoria este o parabolă care admite un maxim care reprezintă înălțimea maximă, $h_{max}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | t (s) | x (m) | y (m) |
| 2 | g | 10 | | 0 | 0 | =$B$3*$B$5*D2-$B$2*D2^2/2 |
| 3 | v0 | 40 | | 0.2 | 6.4 | 4.6 |
| 4 | α | 37 | | 0.4 | 12.8 | 8.8 |
| 5 | sin(α) | 0.6 | | 0.6 | 19.2 | 12.6 |
| 6 | cos(α) | 0.8 | | 0.8 | 25.6 | 16 |
| 7 | | | | 1 | 32 | 19 |
| 8 | | | | 1.2 | 38.4 | 21.6 |
| 9 | | | | 1.4 | 44.8 | 23.8 |
| 10 | | | | 1.6 | 51.2 | 25.6 |
| 11 | | | | 1.8 | 57.6 | 27 |
| 12 | | | | 2 | 64 | 28 |
| 13 | | | | 2.2 | 70.4 | 28.6 |
| 14 | | | | 2.4 | 76.8 | 28.8 |
| 15 | | | | 2.6 | 83.2 | 28.6 |
| 16 | | | | 2.8 | 89.6 | 28 |
| 17 | | | | 3 | 96 | 27 |
| 18 | | | | 3.2 | 102.4 | 25.6 |
| 19 | | | | 3.4 | 108.8 | 23.8 |
| 20 | | | | 3.6 | 115.2 | 21.6 |
| 21 | | | | 3.8 | 121.6 | 19 |
| 22 | | | | 4 | 128 | 16 |
| 23 | | | | 4.2 | 134.4 | 12.6 |
| 24 | | | | 4.4 | 140.8 | 8.8 |
| 25 | | | | 4.6 | 147.2 | 4.6 |
| 26 | | | | 4.8 | 153.6 | 0 |




**94.** /2/ **a.** Din $D = H$ și din ecuațiile mișcărilor pe cele două axe, *Ox* și *Oy*, $D = v_0 t_c$ și $H = \dfrac{gt_c^2}{2}$, obținem $H = D = \dfrac{2v_0^2}{g} = 20\mathrm{m}$.

**b.** $t_c = \dfrac{D}{v_0} = 2\mathrm{s}$.

**c.** Din legea vitezei pe axa *Oy* obținem $v_y = gt_c = 20\mathrm{m/s}$, iar viteza pietrei la sol este $v_s = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} \simeq 22{,}36\mathrm{m/s}$.

**95. /2/** Din $v = nv_0$ și $v^2 = v_0^2 + v_y^2 \Rightarrow \; v_y = v_0\sqrt{n^2 - 1}$, iar din legea vitezei pe axa $Oy$, $v_y = g\tau$. Obținem $v_0 = \dfrac{g\tau}{\sqrt{n^2 - 1}} \simeq 5\text{m/s}$.

**96. /2/** Durata mișcării grenadei în aer trebuie să fie mai mică decât timpul în care arde fitilul. Din condiția $T < \tau \Rightarrow \quad v_0 < \dfrac{g\tau}{2\sin\alpha} \Rightarrow$ $v_{0\max} = \dfrac{g\tau}{2\sin\alpha} = 20\text{m/s}$.

**97. /2/** **a.** Mingea primește impulsul orizontal după un timp $t_0 = \dfrac{3v_0 - v_0}{g} = 2\text{s}$ de la lansare. Înălțimea la care mingea primește impulsul orizontal este $h = H - v_0 t_0 - \dfrac{gt_0^2}{2} = 80\text{m}$. Durata mișcării din momentul impactului până la atingerea solului este $t = \dfrac{-3v_0 + \sqrt{9v_0^2 + 2gh}}{g} = 2\text{s}$, iar distanța parcursă pe orizontală până la sol este $D = vt = 100\text{m}$.

**b.** Din legea vitezei pe axa $Oy$ obținem $v_y = 3v_0 + gt = 50\text{m/s}$, iar viteza cu care mingea atinge solul este $v_s = \sqrt{v^2 + v_y^2} \simeq 70{,}7\text{m/s}$.

**98. /3/** **a.** $h_{\max 1} = \dfrac{v_{01}^2 \sin^2\alpha}{2g} = 3{,}75\text{m}$, $h_{\max 2} = \dfrac{v_{02}^2 \sin^2\alpha}{2g} = 15\text{m}$.

**b.** Folosind expresia bătăii, $b = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$ și $\Delta b = b_2 - b_1$ obținem $\Delta b = \dfrac{2\left(v_{02}^2 - v_{01}^2\right)\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 25{,}95\text{m}$.

**c.** $v_1 = v_2 \Rightarrow v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$, în care înlocuim: $v_{1x} = v_{01}\cos\alpha$, $v_{2x} = v_{02}\cos\alpha$, $v_{1x} = v_{01}\sin\alpha - gt$, $v_{2x} = v_{02}\sin\alpha - gt$. Obținem momentul de timp la care modulele vitezelor sunt egale: $t = \dfrac{v_{01} + v_{02}}{2g\sin\alpha} = \sqrt{3}\text{s} = 1{,}73s$. Coordonatele pietrelor la momentul $t$ sunt: $X_1 = v_{01}t\cos\alpha = 8{,}65\text{m}$, $Y_1 = v_{01}t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} = 0$, și respectiv $X_2 = v_{02}t\cos\alpha = 17{,}3\text{m}$, $Y_2 = v_{02}t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} = 15\text{m}$.

Observăm că $Y_1 = 0$ și $Y_2 = h_{\max 2}$, așadar momentul în care vitezele au același modul este cel în care prima piatră atinge solul iar cea de-a doua se află în vârful traiectoriei parabolice.

**d.** Distanța dintre pietre este dată de relația: $D^2 = \left(X_2 - X_1\right)^2 + \left(Y_2 - Y_1\right)^2 \Leftrightarrow D = \dfrac{v_{02}^2 - v_{01}^2}{2g\sin\alpha} \Rightarrow$

$D = 10\sqrt{3}\text{m} = 17,3\text{m}.$

**99. /0/** $a = F/m = 4\text{m/s}^2$, $a' = 2\text{m/s}^2$.

**100. /0/** $a_2 = a_1 F_2 / F_1 = 5\text{m/s}^2$.

**101. /0/** $a_2 = a_1 M / \left(M + m\right) = 0,3\text{m/s}^2$.

**102. /0/** **a.** $a_1 = 3a = 0,6\text{m/s}^2$;

**b.** $a_2 = a\cos\alpha = 0,173\text{m/s}^2$.

**103. /0/** $F_r = mg = 1,2\text{kN}$.

**104. /0/** $a = F\big/\left(\rho L^3\right) = 4\,\text{m/s}^2$.

**105. /0/** $a = \left(F - mg\right)/m = 5\text{m/s}^2$.

**106. /0/** $F_\text{r} = m\left(g - a\right) = 2\text{N}$.

**107. /1/** $F_\text{tr} = m\left[a + \left(1 + f\right)g\right] = 24,4\text{N}$.

**108. /1/** $F_\text{r} = m\left(g/2 - a\right) = 7\text{N}$.

**109. /1/** $a_{u,c} = \mp g\sin\alpha$, $a_\text{u,c}^{\alpha=30^\circ} = \mp 5\text{m/s}^2$, $a_\text{u,c}^{\alpha=60^\circ} = \mp 8,66\text{m/s}^2$,

$a_\text{u,c}^{\alpha=0^\circ} = 0$, $a_\text{u,c}^{\alpha=90^\circ} = \mp 10\text{m/s}^2$.

**110. /1/** $a = \left(F - mg\right)/m$; $a_1 = 2\text{m}/\text{s}^2$ , $a_2 = 0$; $a_3 = -2\text{m}/\text{s}^2$ .

**111. /1/** $F_1 = ma_1 = 410\text{kN}$; $F_2 = 0$; $F_3 = -ma_3 = 205\text{kN}$.

**112. /1/** $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} = 2\text{m/s}^2$, $F_{12} = m_2 a = 0,2\text{N}$.

**113. /1/** $F_{12} = 2F/3 = 4\text{N}$, $F_{23} = F/3 = 2\text{N}$.

**114. /1/** $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - g = 1\text{m/s}^2$, $F_\text{ap} = N = m_2\left(a + g\right) = 4,4\text{N}$.